



## Série 4

### *Lois discrètes*

#### Exercice 1

A un concours se présentent deux fois plus d'hommes que de femmes. On choisit une personne au hasard, et on appelle  $X$  la variable aléatoire "nombre de femmes".

- Quelle loi suit la variable  $X$  ? Donner la loi de probabilité.
- Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type.

#### Exercice 2

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 4 et 0,2. Quelles sont les valeurs prises par  $X$  et les probabilités associées ?

#### Exercice 3

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type.

#### Exercice 4

Une machine déréglée produit des pièces dont  $\frac{1}{3}$  sont défectueuses.

Dans un lot de 9 pièces fabriquées par cette machine, calculer le nombre moyen de pièces défectueuses et la probabilité associée.

#### Exercice 5

La probabilité pour qu'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est égale à 0,2. Sachant qu'un lustre possède 5 ampoules, calculer la probabilité

- de ne pas changer d'ampoule en 2 ans.
- de changer toutes les ampoules en 2 ans.

#### Exercice 6

Un joueur a une chance sur trois de gagner une partie. Il joue cinq parties. Calculer la probabilité pour qu'il gagne :

- trois parties.
- cinq parties.
- au plus une partie.
- au moins deux parties.

### Exercice 7

Combien de pièces de monnaie, non truquées, doit-on jeter pour que la probabilité d'obtenir, en un seul lancer, au moins une fois "pile" soit supérieure à 90 % ?

### Exercice 8

Dans une PME, sont embauchés 6 ouvriers et 5 employés. Le PDG, souhaitant prendre l'avis du personnel, interroge 7 personnes choisies au hasard parmi ces 11 personnes. Soit  $X$  la variable aléatoire : "nombre d'ouvriers interrogés".

- a) Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
- b) Quelle est sa loi de probabilité ?
- c) Calculer la probabilité d'interroger 4 ouvriers.

### Exercice 9

A un guichet de la SNCF se présentent 2 femmes et 3 hommes. On choisit 2 personnes au hasard pour une enquête. Soit  $X$  le nombre de femmes.

- a) Quelle est la probabilité de choisir au moins une femme ?
- b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type.

### Exercice 10

On choisit au hasard 10 étudiants de DEUG psychologie pour un entretien. 304 étudiants sont inscrits en première année et 233 en deuxième. Soit  $X$  le nombre d'étudiants de première année parmi les 10 personnes choisies.

- a) Quelle est la probabilité d'avoir 5 étudiants en première année ?
- b) Calculer l'espérance mathématique.
- c) Calculer l'écart-type.

### Exercice 11

Pour accéder à un guichet automatique, il faut utiliser une carte magnétique et un code confidentiel. Un client tapant un code au hasard est refusé 999 fois sur 1 000. Soit  $X$  le nombre d'essais nécessaires pour accéder au guichet.

- a) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
- b) Calculer  $P(X = 1)$ .
- c) Sachant qu'au bout de trois essais infructueux, la carte est confisquée, calculer la probabilité d'accéder au guichet au hasard ?
- d) Combien faut-il d'essais en moyenne pour accéder au guichet par hasard ?

### Exercice 12

Lors de tests d'accès à un ordinateur central par réseau télématique, on a constaté que 95 % des essais permettaient une connexion correcte. Une entreprise doit se connecter 4 fois dans la journée pour la mise à jour de ses fichiers. Soit  $X$  le nombre d'essais nécessaires pour se connecter 4 fois.

- a) Calculer  $P(X = 4)$ .
- b) Calculer la probabilité de dépasser 6 essais.
- c) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type.

### Exercice 13

Dans une entreprise, on a mis au point le système de test suivant pour vérifier la qualité des produits. On teste 10 produits ensemble :

- si le test est positif, on accepte tous les produits ;
- si le test est négatif, on teste à nouveau chaque produit individuellement.

On sait que la probabilité pour qu'un ensemble de 10 produits soit accepté est égale à 0,9. On teste 50 produits par groupes. Soit  $X$  le nombre total de tests.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
- 2) Donner la loi de probabilité de  $X$ .
- 3) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type.
- 4) Comparer ces résultats avec ceux obtenus si chaque produit est testé individuellement. Quelle méthode vous semble la plus intéressante ?

### Exercice 14

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées.

1) Après un premier réglage, on constate une proportion de 30 % de pièces défectueuses. On examine 5 pièces choisies au hasard dans la production. Soit  $X$  la variable aléatoire : "nombre de pièces défectueuses parmi les 5".

- a) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
- b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de  $X$ .
- c) Quelle est la probabilité que deux des pièces soient défectueuses ?
- d) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

2) Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses devient 5 %. On examine un lot de 100 pièces.

- a) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièce défectueuse.
- b) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses.
- c) Calculer la probabilité d'obtenir moins de trois pièces défectueuses.
- d) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit compris, au sens large, entre 2 et 4.

### Exercice 15

Une usine fabrique des vis dont 3 % ont des défauts.

a) On prélève 1 000 vis au hasard. Quelle est la probabilité :

-- d'avoir plus de 50 vis défectueuses ?

-- d'avoir entre 20 et 40 vis défectueuses ?

b) On veut 1 950 vis sans défaut. Par prudence, on en prélève 2 000. Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de vis en bon état ?

### Exercice 16 (suite de l'exercice 8 de la série 3 sur la loi normale)

Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 7, passe un oral si sa note est comprise entre 7 et 12, est admis sans oral si sa note est supérieure à 12. On suppose que les notes suivent une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ .

1) On suppose  $\mu = 9$  et  $\sigma = 3$ .

On considère un ensemble de 500 candidats choisis au hasard. Quelle est la probabilité pour que le nombre de candidats passant l'oral soit compris entre 284 et 306 ?

2) On suppose  $\mu$  et  $\sigma$  inconnus. On souhaite admettre (sans oral) 15,87 % des candidats et ajourner 6,68 % des candidats. Dans l'exercice 8 de la série 3, on a trouvé  $\mu = 10$  et  $\sigma = 2$ .

On considère un ensemble de 600 candidats choisis au hasard. Quelle est la probabilité que le nombre de candidats admis sans oral soit supérieur à 100 ?

### Exercice 17 (UPPA)

Une usine fabrique des pièces dont 1% est défectueuse. On échantillonne 5 pièces choisies au hasard.

a) Quelle est la probabilité que les 5 pièces soient sans défaut ?

b) Quelle est la probabilité que les 3 premières soient sans défaut et que les deux dernières soient défectueuses ?

c) Quelle est la probabilité que les 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> soient sans défaut et que les deux autres soient défectueuses ?

d) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 des 5 pièces soient sans défaut ?

e) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 des 5 pièces soient sans défaut ?

f) Représenter graphiquement les probabilités que 0, 1, 2, 3, 4, 5 pièces soient sans défaut.

### Exercice 18 (UPPA)

Un collègue biologiste du professeur Marc Artzrouni a passé 17 ans en Afrique à étudier la mouche tsé-tsé, responsable de la propagation de la maladie du sommeil. Il a travaillé avec ce dernier sur des modèles statistiques du piégeage de ces mouches (si on les piège, elles ne peuvent plus transmettre la maladie). Dans une expérience de piégeage, on a établi que chaque minute, il y a une probabilité  $p = 0.6$  qu'une mouche soit piégée et une probabilité  $1 - p$  qu'aucune mouche ne soit piégée.

- 1) Quels sont les paramètres  $n$  et  $p$  de la loi binomiale qui donne le nombre  $S$  de mouches piégées par heure ? Donnez également l'espérance  $\mu_S$  et l'écart-type  $\sigma_S$  de  $S$ .
- 2) Calculez les probabilités que  $S = 20, 25, 30, 35, 40, 45$ . Représentez graphiquement ces probabilités sous forme de rectangles de bases 1 centrés en 20, 25, 30, 35, 40, 45.
- 3) Représentez sur le même graphique la fonction densité de probabilité  $d_{\text{norm}}(\cdot, \mu_S, \sigma_S)$  de la loi normale qui approxime la loi de  $S$  de la question 1).
- 4) Utilisez l'approximation normale pour calculer les probabilités que pendant une heure donnée, le nombre  $S$  de mouches piégées vérifie :  $S \leq 34$  ;  $35 \leq S \leq 36$  ;  $27 \leq S$  (tuyau : pour  $S \leq 34$ , l'aire sous la courbe de la fonction de densité de probabilité de la loi normale se calcule jusqu'à 34.5, pour  $35 \leq S \leq 36$ , l'aire se calcule entre 34.5 et 36.5 et pour  $27 \leq S$ , l'aire se calcule pour 26.5).  
Calculez la probabilité exacte que  $35 \leq S \leq 36$ .
- 5) Utilisez l'approximation normale de  $S$  pour trouver les probabilités que le nombre de mouches piégées soit à moins d'un écart-type de sa moyenne ; à moins de deux écarts-types de sa moyenne. Explicitez ces intervalles.

### Exercice 19 (UPPA) : Jeu de la roulette avec un zéro où l'on parie 10 fois sur les 18 nombres pairs entre 1 et 36.

On gagne si la boule se trouve dans une case portant un numéro pair compris entre 1 et 36.

- 1) Quelle est la probabilité de gain à chaque jeu ?
- 2) Quelle est la loi du nombre  $S$  de jeux gagnés sur les 10 paris ?
- 3) Calculez  $p(S = k)$  pour chaque valeur de  $k$  et représentez graphiquement cette distribution sous forme de rectangles de bases 1 centrés en chaque valeur de  $k$ .
- 4) Calculer l'espérance  $\mu_S$  et l'écart-type  $\sigma_S$  de  $S$ , puis représentez sur le même graphique la fonction de densité de la loi normale qui approxime la distribution  $S$ .
- 5) Calculez la probabilité exacte que le nombre de gains sur 10 paris soit 6 ou 7. Utilisez la loi normale pour approximer cette probabilité (de la même façon que dans la question 4) de l'exercice 18).

### Exercice 20 (UPPA)

Un examen sous forme de « questionnaire à choix multiple » (QCM) comporte 5 réponses possibles pour chaque question, dont seulement une est correcte.

- 1) Le candidat reçoit un point pour une réponse juste et 0 autrement. On suppose qu'un candidat répond à une question au hasard.
  - a) Quelle est la probabilité  $p$  que sa réponse soit correcte ?
  - b) Quelle est l'espérance du nombre de points gagnés  $P$  sur cette question ?
- 2) On veut maintenant pénaliser une réponse fautive par une note négative  $-N$  (avec  $N > 0$ ) de telle façon que l'espérance de  $P$  soit 0 si le candidat répond au hasard.
  - a) Ecrire cette espérance en fonction de  $N$ , pour une réponse donnée au hasard.
  - b) Trouver la valeur critique  $N_1$  de  $N$  de façon que cette espérance soit nulle.
- 3) On suppose qu'il y a maintenant la pénalité  $-N_1$  en cas de réponse fautive. Un candidat est à 50 % (*le degré de confiance*) sûr qu'il connaît la bonne réponse parmi les 5. Il veut savoir s'il doit tenter sa chance avec cette réponse. Pour cela, il faut calculer l'espérance de  $P$  en distinguant les deux cas suivants :
  - a) Le candidat a raison qu'il est à 50 % sûr de connaître la bonne réponse.  
Chercher de façon générale le degré de confiance critique à partir duquel il est avantageux de tenter sa chance avec la réponse que l'on croit bonne.  
Le résultat vous paraît-il logique ?
  - b) Le candidat a tort, et en fait la réponse qu'il croit bonne n'a pas plus de raison de l'être qu'une autre.

Exercice 21 (UPPA) : A la recherche de la stratégie optimale au jeu « Qui veut gagner des millions ? »

Dans ce jeu télévisé, les participants doivent répondre à des questions de culture générale en choisissant une réponse parmi 4 possibles. On ne tiendra pas compte ici des possibilités de jokers.

Il y a un système de « paliers » qui assure des gains minimums. Par exemple, on atteint un premier palier de 1500 € en répondant aux 5 premières questions. La sixième question vaut 3000 €, mais si on donne la mauvaise réponse, on retombe à 1500 €. Si on choisit la bonne réponse, on peut tenter sa chance pour 6000 €. On peut choisir de ne pas répondre, auquel cas on part avec les 3000 €. Si on choisit la mauvaise réponse, on retombe à 1500 €. Si on choisit la bonne réponse, on gagne les 6000 € et on peut tenter les 12000 €. Comme avant, on garde les 6000 € si on ne répond pas et on retombe à 1500 € si on donne la mauvaise réponse. La somme à gagner continue de doubler chaque fois, avec un retour à 1500 € en cas de mauvaise réponse. On passe ainsi à 24000 €, puis à 48000 € qui constitue le second palier en dessous duquel on ne peut plus descendre.

- 1) Donner l'espérance du gain si on répond au hasard à la 6<sup>ème</sup> question (pour 3000 €). En déduire s'il est avantageux de tenter sa chance à la 6<sup>ème</sup> question même si on choisit la réponse au hasard.
- 2) Faites le même calcul après avoir répondu à chacune des questions suivantes. On comparera l'espérance du gain si on joue au hasard, avec le gain sûr obtenu si on choisit de ne pas répondre. Trouvez pour chaque question  $q$  ( $q = 6, 7, 8, 9$  et  $10$ ) à partir de quel degré de confiance justifié noté  $dc(q)$  (c-f exercice 20, question 3)), il est avantageux « statistiquement » de tenter sa chance. Peut-il être avantageux de tenter sa chance si le degré de confiance est inférieur à 50 % ?
- 3) Trouver les  $dc(q)$  pour  $q = 11$  à  $15$  sachant que le palier de 48 K€ est suivi selon le même principe de questions à 72 K€, 100 K€, 150 K€, 300 K€ et 1000 K€. Commenter les résultats.