Série 5

Lois continues

Exercice 1

Soit $X = \mathcal{U}(0,1)$.

Déterminer sa fonction de répartition F.

Calculer : $P\left(X < \frac{3}{4}\right)$; $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{2}\right)$; $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$; $P_{X < \frac{3}{4}}\left(X < \frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

Virginie a rendez-vous avec Paul à la sortie de l'UPPA jeudi à 16 h 30. Mais elle ne pourra pas l'attendre plus de 5 minutes. Paul, qui suit une unité d'informatique à l'autre bout de la ville, estime qu'il peut arriver sur le lieu du rendez-vous à tout moment entre 16 h 25 et 16 h 40 de manière équiprobable.

Si cette hypothèse est exacte, quelle est la probabilité que Paul rencontre Virginie ?

Exercice 3

Une usine fabrique 9 000 unités d'un certain produit en un temps t. Pour cette même période, la demande, en milliers d'unités, concernant ce produit peut être considérée comme une variable aléatoire continue D suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{3}$.

a) Quelle est la probabilité que la demande dépasse la production ?

b) Quelle devrait être la production pour que cette probabilité soit inférieure à 4 % ?

Exercice 4

La durée de vie, en mois, des ampoules "Luminor" est une variable aléatoire continue T dont la densité de probabilité f est définie par : $\begin{cases} f(t) = 0{,}05\,e^{-0{,}05t} & \text{si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Quelle est l'espérance de vie d'une telle ampoule ?

2) Déterminer la fonction de répartition de T.

3) Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule soit supérieure à 2 ans ?

4) Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule dépasse 3 ans sachant qu'elle est supérieure à 1 an ?

Exercice 5

Le nombre de micro-ordinateurs vendus chaque jour dans le magasin HIGHTECH suit une loi de Poisson de paramètre 4.

Calculer la probabilité que dans une journée :

a) on ne vende aucun micro-ordinateur.

b) on vende 4 micro-ordinateurs.

c) on vende au moins un micro-ordinateur.

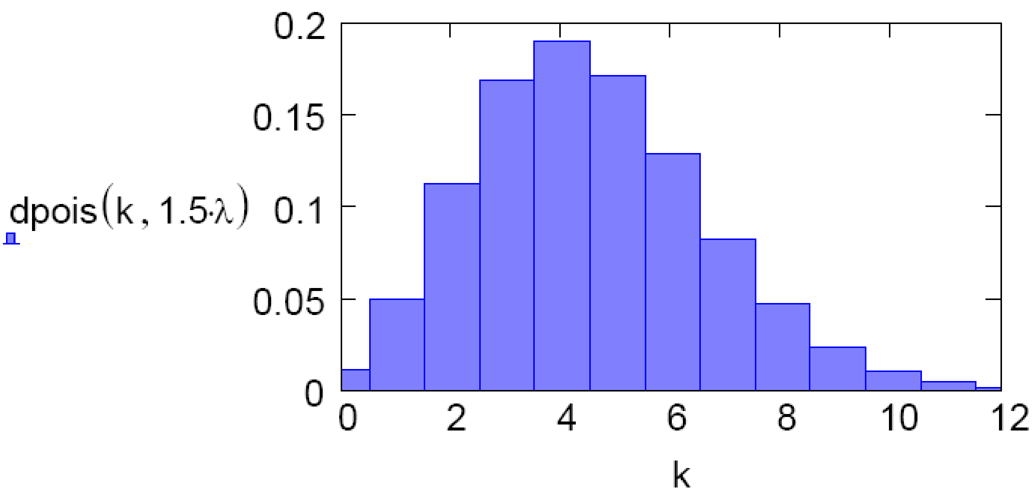
d) le nombre de micro-ordinateurs vendus soit compris, au sens large, entre 2 et 6.

Exercice 6 (UPPA)

On suppose que des internautes cliquent sur le site du journal *Libération* selon un processus de Poisson au rythme de 3 clics par minutes.

1) Donner la loi du temps X séparant deux clics et la loi du nombre N(t) de clics sur un intervalle de temps $[0,t]$.
2) Quel est le temps moyen entre 2 clics ?
3) Quelle est la probabilité qu'il s'écoule au moins 15 secondes avant le premier clic ?
4) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de clic en 15 secondes ? La comparer avec le résultat de la question précédente.
5) Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 clics en 1.5 minutes ?
6) Que représente le graphe ci-dessous ?

$k := 0 .. 12$



7) On estime que s'il y a 8 clics ou plus en 1.5 minutes, le serveur explose.
   a) Lire le graphique pour donner très grossièrement la probabilité d'une telle explosion.
   b) Calculer la valeur exacte de cette probabilité.

Exercice 7

Retrouver par le calcul, l'espérance mathématique et la variance, d'une loi exponentielle de paramètre λ, d'une loi de Poisson de paramètre λ et d'une loi N(t) de paramètre λ, d'une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$.

Exercice 8

Lorsqu'il joue à la bataille navale avec les chalutiers, un sous-marin nucléaire voyage en plongée. Il doit néanmoins refaire surface pour faire sécher les chaussettes de l'équipage au grand air et pour renouveler l'atmosphère que les pieds de ces messieurs ont considérablement empestée. La durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre λ. En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 88,7 % des plongées ont duré plus de six jours.

1) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du paramètre λ.
2) Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.
3) Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la durée de plongée dépasse dix jours.

Exercice 9

Duke Ellington a composé un morceau musique pour l'enregistrer sur un disque 78 tours. La durée est donc limitée à trois minutes et trente secondes. Lorsqu'il l'interprète en public avec son orchestre, cette durée de 3.5 minutes est prolongée de X minutes par le chorus des solistes. La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de moyenne 3 minutes. Au festival de New-Port, il interprète son morceau en public.

1) Calculer la probabilité que le morceau dépasse 7 minutes.
2) Sachant qu'il dépasse 7 minutes, calculer la probabilité qu'il dépasse 10 minutes.

Exercice 10

Pour une femme ayant eu entre 18 ans et 20 ans en 1968, le nombre d'enfants noté X suit une loi de Poisson. Un échantillon de 1000 de ces soixantehuitardes donne 135 femmes sans enfant.

1) Calculer une valeur approchée, à l'unité près, du paramètre de la loi X.
2) Déterminer la proportion de ces femmes ayant eu plus de trois enfants.

Exercice 11

Dans le département de Seine et Marne, on déplore en moyenne huit accidents graves par an, mettant en cause des camions-citernes transportant des produits dangereux. Calculer la probabilité d'avoir dans une année plus de sept accidents de ce type.

Exercice 12

La rue du hammam, dans la médina, a une fréquentation moyenne de cinq ânes par minute. Soit X le nombre d'ânes passant par cette rue pendant une minute donnée.

1) Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
2) Préciser l'espérance mathématique et la variance de X.
3) Sachant qu'il se produit un bouchon lorsque sept bourricots se présentent dans la même minute, calculer la probabilité d'accéder aux bains sans encombre.

Exercice 13

Donald Knuth, inventeur du langage « Latex », s'engage à verser deux dollars au premier lecteur lui signalant une erreur dans un de ses livres.

1) En supposant que le tome 2 comporte une erreur et qu'un lecteur assidu a une chance sur 100 000 de la trouver et de la signaler, sachant que ce livre concerne 500 000 lecteurs assidus, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de lettres, concernant cette faute, reçues par Donald Knuth.
2) Quelle approximation est-on en droit d'utiliser ?
3) Calculer la probabilité que Donald Knuth paie 2 dollars.

Exercice 14

Le gang d'Al Capone utilise les services de seize aimables exécutants. La moitié de ces porte-flingues est superstitieuse : ils ont une patte de lapin dans la poche de leur gilet pare-balles et quatre ont en plus, un trèfle à quatre feuilles séché dans une élégante pochette en crocodile assortie à leurs chaussures. Le jour de la Saint-Valentin, le Boss envoie trois hommes désignés au hasard acheter des roses rouges pour les offrir à la charmante épouse du maire de la Windy-City. Soit X le nombre de porte-bonheur installés dans sa Cadillac blindée rose aux vitres fumées qui glisse le long de la Michigan Avenue, le coffre rempli de fleurs.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.
3) Le jour de Noël, les seize personnages sont attablés devant un plat de 450 huîtres. La probabilité de trouver une perle dans une huître est de 0.001. Soit Y le nombre d'huîtres perlières présentes dans le plat.
    a) Quelle est la loi de probabilité exacte suivie par Y ?
    b) Calculer son espérance et son écart-type.
    c) Justifier l'approximation par une loi.
    d) Calculer la probabilité d'y trouver plusieurs huîtres perlières.

Exercice 15

Un navigateur solitaire traverse l'Atlantique à la rame dans une baignoire. On note T le temps en semaines qu'il passe dans sa baignoire avant la première rencontre avec un pétrolier panaméen. On suppose que le temps moyen est d'une demi-semaine.

1) Reconnaître la loi de la variable aléatoire T.
2) Déterminer son écart-type.
3) Sachant qu'il a déjà ramé une semaine dans la solitude, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au temps qu'il doit encore attendre avant de croiser un pétrolier panaméen.

Exercice 16

Georges se rend chez Favino pour commander une nouvelle guitare. Le nombre X de mois nécessaires pour façonner une guitare suit une loi de moyenne dix. Georges fait sa rentrée à Bobino dans un an et demi. Il compte utiliser cette guitare comme guitare de secours pendant ses concerts. La probabilité pour qu'une corde casse pendant un concert est de 0.05

1) Reconnaître la loi de la variable aléatoire X.
2) Calculer la probabilité pour que Georges soit obligé de changer de guitare et utilise la nouvelle pendant le premier récital.
3) La corde s'est cassée. Calculer la probabilité pour que la guitare de secours soit la nouvelle.

Exercice 17

Le président des Etats-Unis se prépare à déclarer l'embargo économique contre Cuba. Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise serait en moyenne de quatre ans. En supposant exacte cette estimation et sachant qu'il fume deux cigares par jour, calculer le nombre de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0.95.

Exercice 18

Dans un garage, le nombre moyen de voitures vendues en une semaine est huit.

1) Calculer la probabilité que huit voitures aient été vendues en une semaine.
2) Calculer la probabilité qu'au moins deux voitures aient été vendues en une semaine.
3) Plus de huit voitures ont été vendues dans la semaine, quelle est la probabilité qu'il y en ait eu douze ?
4) Quelle est la probabilité qu'il y ait eu au moins six et au plus dix voitures vendues en une semaine ?
5) Quelle est la probabilité que l'on vende moins de seize voitures sachant qu'on en a vendu plus de huit en une semaine ?

Exercice 19

Chaque jour, à 20 heures, Jacques Brel attend Madeleine avec ses lilas. Le temps qu'il doit patienter avant son arrivée est en moyenne de 5 heures. Si elle arrive avant 22 heures, ils vont manger des frites chez Eugène par le tram 33, sinon il rentre chez lui par le tram 21. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tickets de tram 33 qu'il utilise en 70 jours. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 20

La Belle Au Bois Dormant est assise devant sa cheminée, sa quenouille à la main. L'intervalle de temps T, exprimé en minutes, qui sépare l'instant où elle a pris place pour filer la laine et celui où elle va se piquer avec le fuseau est en moyenne de 10.

1) Exprimer la densité de probabilité et la fonction de répartition de T.
2) Calculer l'écart-type de T.
3) Sachant qu'il ne lui est rien arrivé pendant les huit premières minutes, calculer la probabilité pour qu'elle ne se pique pas dans les cinq minutes qui suivent.

Exercice 21

Julien arpente sa rivière favorite, botté de ses cuissardes. Le nombre de truites qu'il prend en une journée avec sa canne à lancer est en moyenne de cinq.

1) Le quota de truites qu'il a le droit de pêcher étant dix, calculer la probabilité pour qu'il atteigne cette limite.
2) Sachant qu'il pêche 50 jours par an, calculer la probabilité d'atteindre au moins une fois ce maximum.