CPI2 2007/2008
PROBABILITES

Série 6

Simulation

Exercice 1 (UPPA) Jet d'une pièce : simulations et calculs

Partie 1. Simulation par tirages de feuilles numérotées

Sortez les papiers numérotés de 1 à 6 que vous avez utilisés en cours pour simuler un jet de dé.

1. Comment utiliser ces six feuilles pour simuler le jet d'une *pièce équilibrée*? On représentera le résultat par une variable aléatoire (v.a.) X qui vaut 1 si le résultat est pile est 0 autrement. Simuler alors 3 fois la v.a. X.

2. Peut-on utiliser les 6 feuilles pour simuler X si la probabilité de pile est 1/3? Si elle est 0.4? Et si elle est 0.564?

3. Chaque étudiant simulera 9 fois la v.a. X quand la probabilité de pile est 0.4. Il y a aura donc 9 *répliques* X_1 , X_2 ,..., X_9 de la v.a. X. Chacun notera:

i. La valeur de la v.a. $S=\Sigma_k X_k$ ("nombre de succès") égale au nombre de piles sur les 9 simulations. Quelles sont les valeurs possibles de S?

ii. La valeur de la v.a. U égale à l'indice du premier jet correspondant à un pile. (Par exemple si votre simulation donne FFPFPFPPF, alors U=3). Quelles sont les valeurs possibles de U? Avec 9 simulations de X, est-on sûr d'avoir une valeur U ? Quelle est la probabilité d'avoir 9 fois "face"?

4. On appelle *ne* le nombre d'étudiants dans le TD. On fera passer dans la salle deux feuilles identiques sur laquelle chacun cumulera les nombres suivants (puis on cumulera les 2 feuilles):

* Nombre de succès sur 9 jets simulés. Combien d'observations de X at-on sur tout le TD?
* Nombre de fois que S=0, 1, 2, ..., 9. Combien d'observations de S at-on?
* Nombre de fois que U=1, 2,3, ... Combien d'observations de U at-on?

Dans la deuxième partie on manipulera la variable aléatoire r uniformément distribuée sur (0,1) et on l'utilisera pour simuler plus rapidement ces jets de pièces.

Partie 2. Simulation par utilisation de la variable aléatoire r uniformément distribuée sur (0,1)

A. Préliminaires sur r:

Utilisez votre calculatrice pour simuler (échantillonner) 40 fois la v.a. uniformément distribuée r entre 0 et 1 (r_1 ,r_2,...,r_{40}). Notez bien les 40 nombres, vous les utiliserez pour d'autres exercices. Si *ne* est le nombre d'étudiants dans le TD, alors n0=40.*ne* est le nombre total de valeurs simulées r_k.

Comptez combien vous avez d'observations dans chacun des 10 intervalles (0, 0.1), (0.1,0.2), etc. jusqu'à 10.

Comme ci-dessus on fera passer des feuilles dans le TD pour rassembler les résultats que l'on récapitulera au tableau sur l'ensemble du TD: nombre de r_k dans chacun des intervalles (0, 0.1), (0.1,0.2), ...(0.9,1.0).

i. Comme dans le cours, tracez l'histogramme (Figure 1) de ces r_k avec des rectangles de bases (0,0.1) , (0.1, 0.2) etc et une *aire* pour chaque rectangle égale à la fréquence correspondante, de telle façon que la somme des 10 aires soit 1. Quelle fonction f(x) deviendrait cet histogramme si le nombre d'étudiants devenait très grand?

---

ii. Tracez sur une Figure 1bis la fonction cumulée HC(x) sur (0,1) qui donne pour x= 0, 0.1, 0.2, ...0.9, 1, les fréquences *cumulées* jusqu'à x. (fonction faite de segments de droites). Quelle serait la fonction limite F(x) de HC(x) si le nombre d'étudiants devenait très grand? Quel est la relation qui existe entre cette fonction limite F(x) et la fonction f(x) de i)?

B. Utilisation des r_k pour la simulation rapide du jet de pièce.

i Pour un r uniformément distribué sur (0,1), on définit la v.a. X par X = 1 si r<0.4 et X=0 si $r \geq 0.4$. Expliquez pourquoi cette v.a. X est la même que celle de la Partie 1, question 3.

ii. Utilisez les 36 premiers nombres r_k pour simuler 4 valeurs de la variable aléatoire (v.a.) S de la Partie 1, question 3i.

iii. Utilisez les mêmes 36 premiers nombres r_k pour simuler 4 valeurs de la v.a. U de la Partie 1, question 3ii.

On fera passer dans la salle deux feuilles identiques sur laquelle chacun cumulera les nombres suivants:

* Nombre total de succès (piles) sur les *36.ne* jets simulés et fréquence correspondante avec laquelle X=1. Combien d'observations de X at-on?
* Nombre de fois que S=0, 1, 2, ..., 9. Combien d'observations de S at-on?
* Nombre de fois que U=0, 1, 2,...... Combien d'observations de U at-on?

iv. Faire trois graphes (Fig 2(X), Fig 2(S), Fig 2(U)) des fréquences empiriques (avec somme des aires = 1) obtenues pour X, S, U sur la base des 36.*ne* jets.

Exercice 2 (UPPA) Le jeu de la roulette

A. Roulette sans zéro: la boule peut tomber dans l'une des 36 cases, numérotées de 1 à 36.

i. Si on mise 1€ sur l'un des 18 premiers nombres, on gagne 1€ supplémentaire avec proba 0.5 et on perd sa mise 1€ avec proba 0.5. Quelle est l'espérance et la variance du gain G à chaque jeu?

ii. Plus généralement, on suppose qu'on mise 1€ sur n nombres (*n* sera 24, 18, 12, ou 6 par exemple). Quelle est la proba p_n que la boule tombe sur l'un des *n* nombres? Trouver la quantité g_n qu'il faut gagner en cas de succès pour que l'espérance du gain G soit 0. (On suppose toujours qu'on perd son euro avec la proba $q_n=1-p_n$). Dans ces conditions ce jeu est *équitable* - avec une telle roulette un casino ne gagnerait ni ne perdrait d'argent à la longue.

B. *Roulette avec un zéro: un casino plus réaliste où la boule peut tomber dans l'une des 37 cases, numérotées de 0 à 36.*

i. Comme avant on peut miser 1€ sur n nombres **>0**. Quelle est maintenant la proba p_n que la boule tombe sur l'un des n nombres? Sachant que le gain correspondant est la même quantité g_n trouvée en Aii , donner pour tout n l'espérance E_n du gain G.

ii. **Simulation:** chacun utilise 10 nombres aléatoires uniformément distribués entre 0 et 1 (pris parmi les 40 tirés à l'exercice I) pour simuler 10 paris sur les n=12 nombres entre 13 et 24. Si G_k est le gain sur la k-ème partie, chacun calcule son bilan sur les 10 paris, c'est à dire $S = \Sigma_k G_k /10$. S'il y a *ne* étudiants, on calculera pour l'ensemble du TD la quantité $S= \Sigma_m S_m$ /ne égale à la *moyenne empirique* (expérimentale) des gains S_m où S_m est la valeur de S pour le m-ème étudiants (m=1, 2, ...,ne). Comparer S= et E_{12} .

La raison d'être de l'espérance μ d'une v.a. X est qu'elle donne le résultat en moyenne de l'expérience, c'est-à-dire que la moyenne empirique de X sur *n* tirages (expériences) est d'autant plus proche de μ que *n* est grand.

Remarque: en réalité de plus en plus de casinos ont *2 zéros* qui diminuent encore l'espérance du gain. On pourrait refaire les mêmes calculs et trouver l'espérance correspondant à deux zéros.

Exercice 3 (UPPA) Le jeu de pierre-papier-ciseaux

Le jeu consiste pour deux joueurs A et B à montrer en même temps avec les doigts soit une pierre (pi), soit une feuille de papier (pa), soit une paire de ciseaux (ci); pi l'emporte sur ci, pa sur pi, et ci sur pa. Si les deux joueurs montrent le même objet, c'est un match nul, personne ne gagne. Autrement, le perdant donne 1€ au gagnant.

Les joueurs vont choisir des stratégies aléatoires. A joue pi avec proba 0.3, pa avec proba 0.1, et ci avec proba 0.6. B joue pi avec proba 0.2, pa avec proba 0.5, et ci avec proba 0.3.

i. Le but est de décider quel joueur vous voulez être. Avez-vous une idée intuitive de quel joueur utilise la meilleure stratégie - c'est-à-dire lequel gagnera *à la longue?*

ii. On définit pour chaque jeu la v.a. G égale au gain de A. Le gain de B est simplement -G, on dit que le jeu est *à somme nulle: la somme des gains sur les deux joueurs est 0; l'un gagne ce que l'autre perd*. Quelles sont les valeurs possibles de G?

iii. Les joueurs choisissent leur stratégies de façons indépendantes. Calculer les probas des 9 combinaisons sachant qu'elles sont obtenues en multipliant les probas correspondantes pour chaque joueur. Par exemple la proba P(Apa, Bci) que A joue pa et B joue ci sera 0.1(0.3) = 0.03. Calculer l'espérance E(G) du gain G de A à chaque jeu.

iv. **Simulation:** mettez-vous en binôme et simulez 10 fois le jeu. Indiquez combien de fois chacune des 9 combinaisons est sortie, et calculez le bilan pour A sur les 10 jeux. Une feuille passera dans la salle pour cumuler les fréquences sur l'ensemble du TD. On comparera (sur un graphe) les fréquences empiriques avec lesquelles chacune des 9 combinaisons est sortie aux probabilités trouvées en iii. On calculera sur l'ensemble du TD la moyenne empirque du gain de A et on la comparera avec E(G). Lequel des deux joueurs choisissez-vous d'être?
