



Séries de Fourier

1 Introduction

L'analyse de Fourier, ou analyse harmonique, est le domaine mathématique qui traite les signaux périodiques ou quasi-périodiques. Elle a été introduite par Fourier pour l'étude de l'équation de la chaleur. Depuis elle est devenue un outil indispensable dans de nombreux domaines : en mathématiques, en physique, en astronomie, en électricité et même en musique.

Ces applications ont pris de l'importance depuis qu'on a étendu le concept de décomposition en séries de Fourier (applicable seulement aux fonctions périodiques), en une transformation de Fourier (utilisable sur des fonctions non périodiques).

2 Séries trigonométriques

2.1 Définition

On appelle série trigonométrique, toute série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général f_n est une fonction réelle définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où a_n et b_n sont des réels indépendants de $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}_+$ donné, $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Cas particulier : fonction périodique de période T

2.2.1 Propriétés de périodicité

Une fonction f , définie sur \mathbb{R} est dite périodique de période $T (T \neq 0)$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t + T) = f(t)$. Les fonctions $t \mapsto f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ sont périodiques de période 2π . Par conséquent, si la série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} , la fonction somme de cette série $t \mapsto \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(t)$ est une fonction périodique de période 2π .

Donc à condition de converger simplement, toute série trigonométrique est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2.2.2 Calcul des coefficients a_n et b_n

Les coefficients a_n et b_n sont réels et peuvent être calculés à partir des expressions suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Cette décomposition signifie que les fonctions $t \mapsto \cos(n\omega t)$ et $t \mapsto \sin(n\omega t)$ constituent une base orthogonale dans l'espace des fonctions considérées, vérifiant pour n et m entiers :

$$\forall n, m \int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$$

$$\forall n \neq m \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$$

$$\forall n \neq 0 \int_0^T \cos^2(n\omega t) dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t) dt = \frac{T}{2}$$

Considérons une série trigonométrique $\sum f_n$ et supposons qu'elle converge sur \mathbb{R} .
On obtient la définition de la série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Remarque : Des simplifications apparaissent dans le cas de fonctions paires ou impaires :

- si f est paire, $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- si f est impaire, $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Forme complexe de la série :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

avec $c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{in\omega t} dt, n \in \mathbb{Z}$.

3 Série de Fourier

3.1 Interprétation physique

La constante a_0 représente la valeur moyenne du signal $s(t)$ et est appelée composante continue du signal périodique. Les fréquences des composantes sinusoïdales sont des multiples de la fréquence F du signal périodique décomposé. La fréquence $F_1 = F$ correspond au fondamental, ou premier harmonique ($n=1$). La fréquence $F_n = nF$ correspond à l'harmonique d'ordre n ($n>1$).

3.2 Théorème de Dirichlet

Le théorème de Dirichlet nous permet de connaître la nature de la série de Fourier associée à sa fonction f sur \mathbb{R} et, si elle est convergente, de savoir si la série de Fourier est égale à sa fonction.

Soit f une fonction périodique, de période 2π , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , alors la série de Fourier associée à f est convergente pour toute valeur de t et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}[f(t^+) - f(t^-)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

où a_0, a_n, b_n sont les coefficients de Fourier. En particulier en tout point t_0 où f est continue, la somme de la série de Fourier associée à f est égale à $f(t_0)$.

3.3 Formule de Parseval

3.3.1 Théorème

Soit f une fonction réelle périodique de période T , vérifiant les conditions d'application du théorème de Dirichlet. On démontre la formule suivante :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Cette formule est valable pour toutes les fonctions à valeurs réelles.

Remarque :

- Si la série est donnée sous la forme

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega - \phi)(t)$$

avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, la formule de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

En utilisant la forme complexe de la série de Fourier, la formule s'écrit :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|^2 + |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

3.3.2 Interprétation physique de la formule de Parseval :

Si la fonction f est la modélisation d'un signal électrique, périodique, de période T , on sait qu'en choisissant des unités convenables, la puissance P du signal est :

$$P = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 dt$$

La formule de Parseval indique donc que la puissance du signal peut se calculer à l'aide des coefficients de Fourier. Plus précisément le signal se décompose en différentes harmonique dont les puissances sont :

1. la puissance du signal $t \mapsto \frac{a_0}{2}$ est

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} \frac{a_0^2}{4} dt = \frac{a_0^2}{4}$$

2. la puissance de la n^{ieme} harmonique est (pour $t \mapsto a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$)

$$P_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))^2 dt = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

3.4 Les séries de Fourier en physique

Les séries de Fourier ont de très nombreuses applications physiques, dans des domaines variés comme le traitement du son et de l'image.

Nous allons nous intéresser à la décomposition des signaux périodiques en superposition de signaux sinusoidaux grâce aux séries de Fourier. D'un point de vue mathématique, on peut calculer le signal de sortie si l'entrée est constante ou sinusoidale. Dans la pratique, le signal d'entrée étant modélisé par une fonction périodique de période T , on cherche à décomposer toute fonction périodique en somme de fonctions sinusoidales.

3.4.1 Principe

Etant donné qu'il s'agit de physique, toutes les conditions nécessaires pour utiliser les séries de Fourier seront vérifiées : nous utiliserons toujours des fonctions bornées, avec un nombre fini de points de discontinuité sur une période.

De façon générale, toute fonction réelle s périodique, de fréquence F , peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoidales (série trigonométrique) :

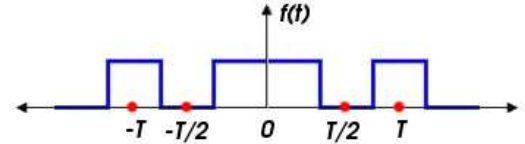
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)],$$

avec $\omega = 2\pi F$.

3.4.2 Exemple - Décomposition de Fourier d'un créneau

Considérons un créneau, d'amplitude A et de période T , défini par une succession périodique d'impulsions rectangulaires de hauteur A et de largeur $\frac{T}{2}$. L'origine des temps est choisie de manière à ce que le signal soit décrit par une fonction f paire, explicitée ci-dessous pour l'intervalle $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$.

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \forall t \in [-\frac{T}{2}, -\frac{T}{4}[\\ f(t) = A & \forall t \in [-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}] \\ f(t) = 0 & \forall t \in]\frac{T}{4}, \frac{T}{2}] \end{cases}$$



Déterminer la série de Fourier correspondant au signal.

Solution :

Pour le calcul des coefficients a_n , nous choisissons la période centrée sur 0 : $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$.

On a la définition de la série de Fourier suivante :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

On remarque que f est paire, donc les coefficients b_n sont nuls, avec $n > 0$.

On calcule la valeur moyenne a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A dt = \frac{A T}{T \cdot 2} = \frac{A}{2}$$

La fréquence F et la pulsation ω du fondamental sont $F = \frac{1}{T}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Calculons les coefficients a_n pour $n > 0$; nous avons :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A \cos(n\omega t) dt = \frac{4A}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)$$

En nous souvenant que $\omega T = 2\pi$, il vient :

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \forall n \equiv 0[2] \\ a_n = \frac{2A}{n\pi} & \forall n \equiv 1[4] \\ a_n = -\frac{2A}{n\pi} & \forall n \equiv 3[4] \end{cases}$$

On obtient finalement la série de Fourier :

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$