EISTI
Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

CPI2 2007/08 – 09/06/2008
Aucun document autorisé - calculatrice UPPA autorisée
Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite fournie
Durée : 3 heures

Correction de l'Examen en Probabilités

Exercice 1 :
Soient k, n deux entiers naturels tels que $2 \leq k \leq n$.

1) a) On a $kC_n^k = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$

De plus, $nC_{n-1}^{k-1} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$.

Donc $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

b) On a $k^2C_n^k = k(kC_n^k) \overset{\text{d'après a)}}{=} k(nC_{n-1}^{k-1}) = (k-1+1)(nC_{n_1}^{k-1})$

$\Leftrightarrow k^2C_n^k = (k-1)(nC_{n-1}^{k-1}) + nC_{n-1}^{k-1}$

$\Leftrightarrow k^2C_n^k = n\big((k-1)C_{n-1}^{k-1}\big) + nC_{n-1}^{k-1} \overset{\text{d'après a)}}{=} n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

Donc $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

2) a) $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = \sum\limits_{k=2}^{n} kC_n^k + C_n^1 \overset{\text{d'après 1) a)}}{=} \sum\limits_{k=2}^{n} nC_{n-1}^{k-1} + n \overset{j=k-1}{=} n\sum\limits_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^j + n$

$\Leftrightarrow S_1 = n\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j - C_{n-1}^0\Big) + n = n\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j 1^j 1^{n-1-j} - 1\Big) + n$

$\Leftrightarrow S_1 \overset{\text{Binôme de Newton}}{=} n(2^{n-1} - 1 + 1) = n2^{n-1}$.

b) $S_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k = \sum\limits_{k=2}^{n} k^2C_n^k + C_n^1 \overset{\text{d'après 1) b)}}{=} \sum\limits_{k=2}^{n} \Big(n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}\Big) + n$

$\Leftrightarrow S_2 = n(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} + n\sum\limits_{k=2}^{n} C_{n-1}^{k-1} + n$

$$\Leftrightarrow S_2 \overset{j=k-2 \text{ et } p=k-1}{=} n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} + n\sum_{p=1}^{n-1} C_{n-1}^{p} + n$$

$$\Leftrightarrow S_2 = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{j} 1^j 1^{n-2-j} + n\Big(\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p} - C_{n-1}^{0}\Big) + n$$

$$\Leftrightarrow S_2 = n(n-1)2^{n-2} + n(2^{n-1}-1) + n = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercice 2 :

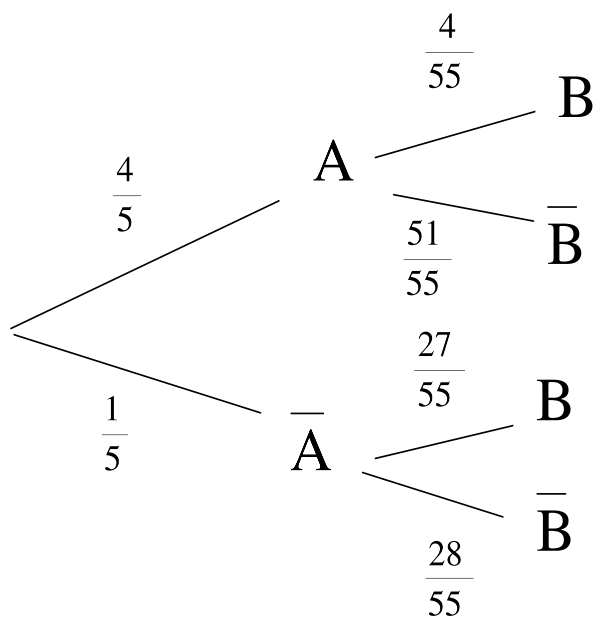
On note A l'événement : "le tableau est estimé authentique",
B l'événement : "les deux experts déclarent la toile authentique"
E_i l'événement : "l'expert n°i a raison", pour $i = 1,\ 2$.

On $P(A) = 0.8$, $P(E_1) = \dfrac{2}{5}$ et $P(E_2) = \dfrac{9}{11}$.

Comme les événements E_1 et E_2 sont indépendants, on a :

$P_A(B) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{11} = \dfrac{4}{55}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{9}{11} = \dfrac{27}{55}$.

On peut schématiser la situation à l'aide de l'arbre ci-dessous.



On cherche $P_B(A)$.

On a $P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$.

De plus, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ car $\left(B \cap A, B \cap \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

Donc, $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0.8 \times \dfrac{4}{55} + 0.2 \times \dfrac{27}{55} = \dfrac{16}{275} + \dfrac{27}{275} = \dfrac{43}{275}$.

Ainsi, $P_B(A) = \dfrac{\frac{16}{275}}{\frac{43}{275}} = \dfrac{16}{43} = 0.37$.

La probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique est de 0.37.

Exercice 3 :
a est un réel positif ou nul, b un réel strictement positif et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \geq a \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$ comme fonction exponentielle. De plus, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 0 \neq f(a)$. Donc f admet un point de discontinuité en a.

D'autre part, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int\limits_{a}^{+\infty} \dfrac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}}\ dx = \Big[-e^{-\frac{x-a}{b}} \Big]_a^{+\infty} = 1$

Donc f peut être la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) On note F_X la fonction de répartition de X.

On a $F_X(x) = P(X \leq x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Si $x < a$ alors $F_X(x) = 0$.

Si $x \geq a$ alors $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int\limits_{a}^{x} \dfrac{1}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}\ dt = \Big[-e^{-\frac{t-a}{b}} \Big]_a^{x} = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$.

Ainsi, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \geq a \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) $Y = X - a$.

a) On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On a $F_Y(y) = P(Y \leq y)\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.

$F_Y(y) = P(X - a \leq y) = P(X \leq y + a) = F_X(y + a)$.
Si $y + a < a \Leftrightarrow y < 0$ alors $F_Y(y) = 0$.
Si $y + a \geq a \Leftrightarrow y \geq 0$ alors $F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{y}{b}}$.

Ainsi, $F_y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y}{b}} & \text{si } y \geq 0 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) La variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{b}$.

c) $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} = b$ et $V(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2} = b^2$.

d) $E(X) = E(Y + a) = E(Y) + a = a + b$ et $V(X) = V(Y + a) = V(Y) = b^2$.

Exercice 4 :
X est la variable aléatoire égale au nombre de poissons verts dans l'échantillon.

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0.02$ car il s'agit d'une succession de 150 épreuves indépendantes les unes des autres, chacune donnant lieu à deux éventualités, avec une probabilité de succès $p = 0.02$.

   b) $E(X) = np = 3$ et $V(X) = np(1 - p) = 2.94$.

   c) Comme $n > 50$ et $p \leq 0.1$, on peut approximer X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 3$.

   d) On a $\forall\ k \in \mathbb{N},\ P(Y = k) = e^{-3}\dfrac{3^k}{k!}$.

   $$P(Y > 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = 1 - e^{-3}\sum_{k=0}^{3}\frac{3^k}{k!} = 0.353$$

   La probabilité que le nombre de poissons verts dans l'échantillon soit strictement supérieur à 3 est 0.353.

2) Z est la variable aléatoire égale au nombre de poissons verts pris dans le filet.

   a) Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = \dfrac{2}{5} = 0.4$ car il s'agit d'une

   succession de 200 épreuves indépendantes les unes des autres, chacune donnant lieu

   deux éventualités, avec une probabilité de succès $p = 0.4$.

   b) On a : $n = 200$, $np = 80$ et $np(1 - p) = 48$. Comme $n \geq 30$, $np \geq 15$

et $np(1-p) \geq 5$, on peut approximer Z par une loi normale de paramètres $\mu = np = 80$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{48} = 6.928$.

c) T suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart-type 6.928.

On centre et on réduit, c'est-à-dire, on pose $U = \dfrac{T-80}{6.928}$.

Ainsi, U suit une loi normale centrée réduite.

$P(75 < T < 85) = P(-0.72 < U < 0.72) = 2P(U < 0.72) - 1 = 2 \times 0.7642 - 1$

$\Leftrightarrow P(75 < T < 85) = 0.5284$.

La probabilité que le nombre de poissons verts pris dans le filet soit strictement compris entre 75 et 85 est 0.5284.

Exercice 5 :
La variable aléatoire X égale au poids du sucre par kilogramme de confiture suit une loi normale de moyenne 465 grammes et d'écart-type 30 grammmes.

On centre et on réduit, c'est-à-dire, on pose $T = \dfrac{X-465}{30}$.

Ainsi, T suit une loi normale centrée réduite.

1) On cherche $1 - P(420 < X < 520)$.

On a $P(420 < X < 520) = P(-1.5 < T < 1.83) = P(T < 1.83) - P(T < -1.5)$

$\Leftrightarrow P(420 < X < 520) = 0.9664 - \big(1 + P(T < 1.5)\big) = 0.9664 - 1 + 0.9332 = 0.8996$.

Donc $1 - P(420 < X < 520) = 0.1004$

Le pourcentage de la production qui ne doit pas porter la mention "pur sucre" est d'environ 10%.

2) $P(930 - a \leq X \leq a) = 0.85 \Leftrightarrow P(\dfrac{465-a}{30} \leq T \leq \dfrac{a-465}{30}) = 0.85$

$\Leftrightarrow 2P(T \leq \dfrac{a-465}{30}) - 1 = 0.85 \Leftrightarrow P(T \leq \dfrac{a-465}{30}) = 0.925$.

Or, d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$P(T \leq 1.44) = 0.9251$. D'où : $\dfrac{a-465}{30} = 1.44 \Leftrightarrow a = 508.2$.

L'intervalle recherché est $[421.8, 508.2]$.

3) On a : $P(y \leq X \leq 495) \leq 0.8 \Leftrightarrow P(\frac{y-465}{30} \leq T \leq 1) \leq 0.8$

$\Leftrightarrow P(T \leq 1) - P(T \leq \frac{y-465}{30}) \leq 0.8 \Leftrightarrow 0.8413 - 0.8 \leq P(T \leq \frac{y-465}{30})$

$\Leftrightarrow 0.0413 \leq P(T \leq \frac{y-465}{30}) \Leftrightarrow 1 - 0.9587 \leq P(T \leq \frac{y-465}{30})$.

Or, d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$P(T \leq 1.74) = 0.9591 \approx 0.9587$.

Ainsi, $1 - P(T \leq 1.74) \leq P(T \leq \frac{y-465}{30}) \Leftrightarrow P(T \leq -1.74) \leq P(T \leq \frac{y-465}{30})$.

D'où, $-1.74 \leq \frac{y-465}{30} \Leftrightarrow y \geq -1.74 \times 30 + 465 \Leftrightarrow y \geq 412.8$.

La valeur minimale de y sachant que le fabricant refusera la vente au-dessus de 20 % de pots rejetés est 412.8 grammes.

Exercice 6 :

1) X est la variable aléatoire égale au nombre d'essais.

a) X suit une loi de Pascal de paramètres $r = 1$ et $p = \frac{1}{4}$, autrement dit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$.

b) On a : $P(X = k) = C_{k-1}^{0} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}^*$.

Donc $P(X = 3) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} = 0.14$.

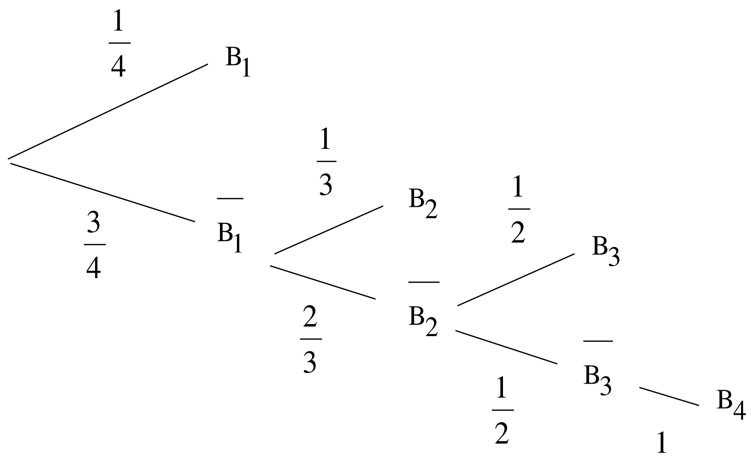
La probabilité de faire trois essais pour trouver la bonne clef est de 0.14.

c) $E(X) = \frac{r}{p} = 4$ et $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = 12$.

2) Y est la variable aléatoire égale au nombre d'essais, lorsque l'automobiliste procède au hasard en éliminant les extrémités déjà testées.

a) Pour $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, on note B_i l'événement : "l'automobiliste trouve la bonne clef à l'essai $n^\circ i$".

On peut schématiser la situation à l'aide de l'arbre ci-dessous.



On a $P(Y=1) = P(B_1) = \frac{1}{4}$, $P(Y=2) = P(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$,

$P(Y=3) = P(B_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $P(Y=4) = P(B_4) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$.

On en déduit la distribution de probabilité suivante :

k	1	2	3	4	Total
$P(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

b) $E(Y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} i = \frac{1}{4}\frac{4\times 5}{2} = \frac{5}{2}$.

$V(Y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} i^2 - \Big[E(Y)\Big]^2 = \frac{1}{4}\frac{4\times 5\times 9}{6} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.