



## Suites récurrentes, homographiques

### 1 Le principe du raisonnement par récurrence

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à un entier naturel  $m$ , on procède en trois grandes étapes :

- **Première étape (initialisation)** : on vérifie que  $P(m)$  est vraie.
- **Deuxième étape (hérédité)** : on suppose que pour un entier naturel  $n \geq m$ ,  $P(n)$  est vraie, on démontre que la proposition  $P(n+1)$  est vraie.
- **Troisième étape (conclusion)** : On conclut, par application du principe de récurrence, que la proposition  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq m$ .

### 2 Suites récurrentes

#### 2.1 Définition

Une suite est dite **récurrente** si on dispose du premier terme (resp. des deux premiers resp. des trois premiers etc...) et d'une formule (dite de **récurrence**) qui permet de calculer un terme à partir du précédent (resp. des deux précédents, resp. des trois précédents etc...).

**Exemple** : La suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

#### 2.2 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans tout ce cours,  $f$  désigne une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

##### 2.2.1 Intervalle de stabilité

DÉFINITION

On dit que  $J$  est un intervalle de stabilité par  $f$  si  $f(J) \subset J$ .

EXEMPLE

L'intervalle  $[0, 1]$  est stable par la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x - x^2$ ; en effet  $f([0, 1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$ .

##### 2.2.2 Points fixes

DÉFINITION

Soit  $x \in I$ . On dit que  $x$  est un point fixe de  $f$  si  $f(x) = x$ .

THÉORÈME

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Supposons que le segment  $[a, b]$  est stable par  $f$ .

Alors  $f$  possède un point fixe appartenant à  $[a, b]$ .

#### THÉORÈME

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Si la suite converge vers  $l$  et si la fonction  $f$  est continue en  $l$ , alors  $l$  est un point fixe de  $f$ .

Autrement dit  $l$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

En général, la fonction  $f$  possède non pas un mais plusieurs points fixes. Pour déterminer la limite éventuelle, on utilise le résultat classique sur les suites : si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$  et si la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $l$  alors  $l \in [a, b]$ .

### 2.2.3 Monotonie de la suite

#### PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est une fonction croissante sur  $I$  (intervalle contenant les valeurs  $u_n$ ) alors la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est monotone.

- $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante si  $f(u_0) \geq u_0$
- $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante si  $f(u_0) \leq u_0$

#### PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est une fonction décroissante sur  $I$  (intervalle contenant les valeurs  $u_n$ ) alors les suites extraites  $(u_{2n})_{n \geq 0}$  et  $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont monotones et de sens contraire. De plus, si elles sont convergentes de même limite  $l$  alors  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge aussi vers  $l$ .

## 2.3 Suites arithmético-géométrique

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe des scalaires  $a$  et  $b$  tels que

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (1)$$

Si  $a = 1$ , on notera que la suite est arithmétique de raison  $b$ , et si  $b = 0$ , la suite est géométrique de raison  $a$ .

#### PROPRIÉTÉ

Si  $a \neq 1$ , la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a} \quad (2)$$

est géométrique de raison  $a$ .

La propriété précédente permet alors d'écrire  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $u_0$  avec  $v_n = v_0 a^n$ , d'où  $u_n = v_0 a^n + \frac{b}{1-a}$   
( $v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$ ).

## 2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère que les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des scalaires.

Une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe des scalaires  $a \neq 0$  tels que

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

On notera qu'une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de la forme (3) est entièrement déterminée par  $u_0$  et  $u_1$ .

On appelle équation caractéristique, l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (4)$$

Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation (4).

- Si  $\Delta > 0$ , alors l'équation (4) a deux racines distinctes réelles  $x_1$  et  $x_2$ . Toute suite vérifiant (3) est alors de la forme :

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes que l'on détermine à l'aide de  $u_0$  et  $u_1$ .

- Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation (4) a une solution double  $x$ . Toute suite vérifiant (3) est alors de la forme :

$$u_n = (\alpha + \beta n)x^n$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes que l'on détermine à l'aide de  $u_0$  et  $u_1$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors l'équation (4) a deux racines conjuguées sous forme exponentielle  $x_1 = \rho e^{i\theta}$  et  $x_2 = \rho e^{-i\theta}$ . Toute suite vérifiant (3) est alors de la forme :

$$u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes que l'on détermine à l'aide de  $u_0$  et  $u_1$ .

### 3 Suites homographiques

DÉFINITION

Une suite est dite **homographique**, si elle est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = h(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{avec } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ et } ad-bc \neq 0 \end{cases}$$

Une telle suite est définie si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de  $h$ .

**Nb** :  $h$  est une fonction appelée fonction homographique.

PROPRIÉTÉ

Si  $u$  est une suite homographique, on considère  $h(x) = x$  soit

$$cx^2 - (a-d)x - b = 0 \tag{5}$$

- Si (5) admet deux racines distinctes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  alors la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \end{cases}$$

est une suite géométrique de raison  $k$  et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où } k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$

On a ainsi  $u_n = \frac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1} = \frac{\beta k^n (u_0 - \alpha) - \alpha (u_0 - \beta)}{k^n (u_0 - \alpha) - (u_0 - \beta)}$  (vrai car  $\alpha \neq \beta$  donc  $v_n \neq 1$ ).

- Si (5) admet une racine double  $\alpha$  alors la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ v_n = \frac{1}{u_n - \alpha} \end{cases}$$

est une suite arithmétique de raison  $k$  et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \quad \text{où } k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

On a ainsi  $u_n = \frac{1}{v_n} + \alpha = \frac{u_0 + \alpha kn(u_0 - \alpha)}{1 + kn(u_0 - \alpha)}$ .

### 4 Convergence des suites homographiques

Notons qu'en cas de convergence, la limite d'une suite homographique ne peut être que l'un des points fixes  $\alpha$  ou  $\beta$  de la fonction  $f$ .

Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation (5).

- Si  $\Delta > 0$  (cas réel) :
  - si  $|k| < 1$ , alors  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0, donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\alpha$
  - si  $|k| > 1$ , alors  $(v_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $-\infty$  ou  $+\infty$ , donc  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\beta$
  - si  $k = 1$  alors  $a - \alpha c = a - \beta c$ , d'où  $\alpha = \beta$  (avec  $c \neq 0$ , ce qui est faux car  $\beta$  et  $\alpha$  sont distincts. On exclut donc ce cas.
- Si  $\Delta < 0$  (cas complexe) :  
La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge. Elle ne peut pas converger car la fonction  $f$  n'a pas de point fixe réel.
- Si  $\Delta = 0$  :  
Comme  $(v_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ , on en déduit que  $(u_n)$  converge  $\alpha$  (la solution de l'équation (5)).

## 5 Application : Etude de la convergence d'une suite récurrente

ENNONCÉ : Etudier la nature de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{2}{u_n} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

RÉSOLUTION :

**Remarque :** Il est conseillé de représenter la suite graphiquement afin d'avoir une idée sur la convergence.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - 0$  par :

$$f(x) = -\frac{2}{x} + 3$$

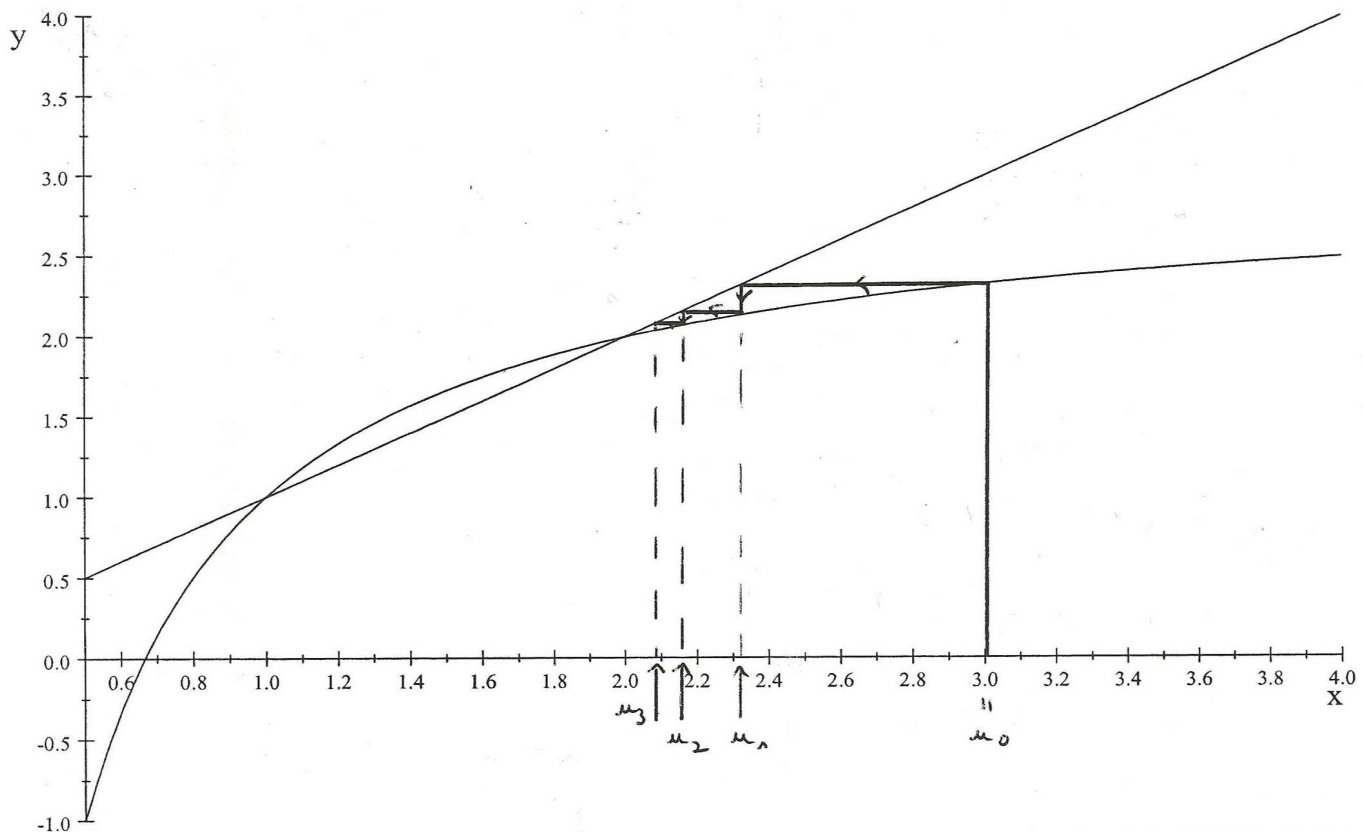


FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction  $f$  et de la droite d'équation  $y = x$  dans un repère orthogonal

Graphiquement, on constate que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers l'unique solution  $\alpha$  sur  $[1, 2, 3]$  de l'équation  $f(x) = x$  avec  $\forall x \in \mathbb{R}^* f(x) = -\frac{2}{x} + 3$ . Déterminons explicitement la valeur de  $\alpha$ .

$$\text{On a alors } -\frac{2}{\alpha} + 3 = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha^2 = -2 + 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ (\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

### \* Déterminons un intervalle de stabilité

$$u_0 = 3; u_1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}; u_2 = 3 - \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{15}{7}$$

Démontrons par récurrence que  $I = [2, 3]$  est un intervalle de stabilité. Posons comme hypothèse de récurrence  $u_n \in [2, 3]$ .

#### - initialisation

$u_0 = 3 \in [2, 3]$ , la propriété est donc vraie.

- **Hérédité** : Supposons que la propriété est vraie, c'est-à-dire  $u_n \in [2, 3]$ . Alors

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq -\frac{2}{u_n} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow 2 \leq -\frac{2}{u_n} + 3 \leq 3 - \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \leq -\frac{2}{u_n} + 3 \leq \frac{7}{3}$$

et on a donc bien  $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

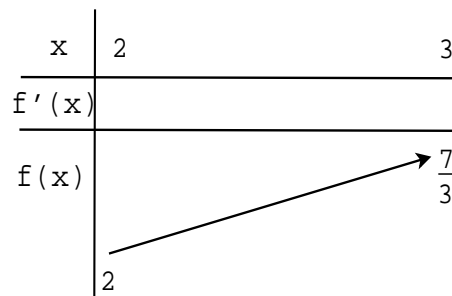
Ainsi la propriété est *héréditaire*.

**Conclusion** :  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in [2, 3]$ .

### \* Etudions $f$ sur $[2, 3]$ .

$f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[2, 3]$  avec

$$\forall x \in [2, 3], f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$$



Donc  $f$  est *croissante* sur  $[2, 3]$ , on peut déduire par propriété que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est *monotone*. Compte-tenu du calcul des premiers termes, on en déduit que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est *décroissante*. Étant par ailleurs *minorée* par  $\alpha$ , on peut affirmer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $l$ .  $l$  satisfait l'équation  $f(x) = x$  puisque  $f$  est *continue* sur  $[2, 3]$  et  $l \in [2, 3]$ . De l'étude menée initialement sur les *points fixes* de  $f$ , on peut dire que **la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 2**.