E.I.S.T.I. Département Mathématiques

1 ère Année Spécialisation G. Mathématique 2013-2014

Parcours MATHS-APPROFONDIES-FINANCE 2013-2014

I. Kortchemski et M. Manolessou

PROJET: Calcul des prix des options Européenne, Américaine, option Barrière "Knock-Out" et Butterfly dans le modèle Binômial

Le modèle Binomial est un modèle discret d'évaluation d'options. D'une grande simplicité, il a permis à des générations de traders et de market-makers d'évaluer leurs "books" avec une flexibilité suffisante pour leur permettre de gagner leurs vies, et parfois plus.

Actuellement le modèle Binomial est utilisé pour implémenter l'évolution des actifs sousjacents et calculer les prix des options exotiques dont les équations n'admettent pas une formule analytique.

1. Evolution de l'actif sousjacent

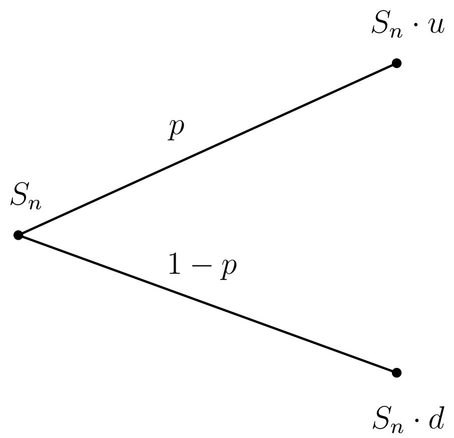
Supposons qu'une action S évolue dans le temps sur l'intervalle $[0, T]$. Discrétisons l'intervalle $[0, T]$: $t_n = \Delta t n, \quad T = \Delta t N$. A chaque instant t_n on fait correspondre le prix S_n:

$$t_n \to S_n, \qquad t_0 \to S_0$$

L'idée principale de la Méthode Binômiale est la suivante: S_{n+1} n'admet que 2 valeurs possibles:

$$S_{n+1} = \begin{cases} u \cdot S_n \\ d \cdot S_n \end{cases}$$

On peut donc approcher la diffusion dans le temps par une chaine de Markov (voir le cours de processus stochastiqus discrets) - un arbre binômial.



Dans l'arbre binômial on définit la probabilité historique de transition ou la matrice de transition P:

$$\begin{cases} \mathbb{P}[S_{n+1} = u \cdot x / S_n = x] = p \\ \mathbb{P}[S_{n+1} = d \cdot x / S_n = x] = 1 - p \end{cases}$$

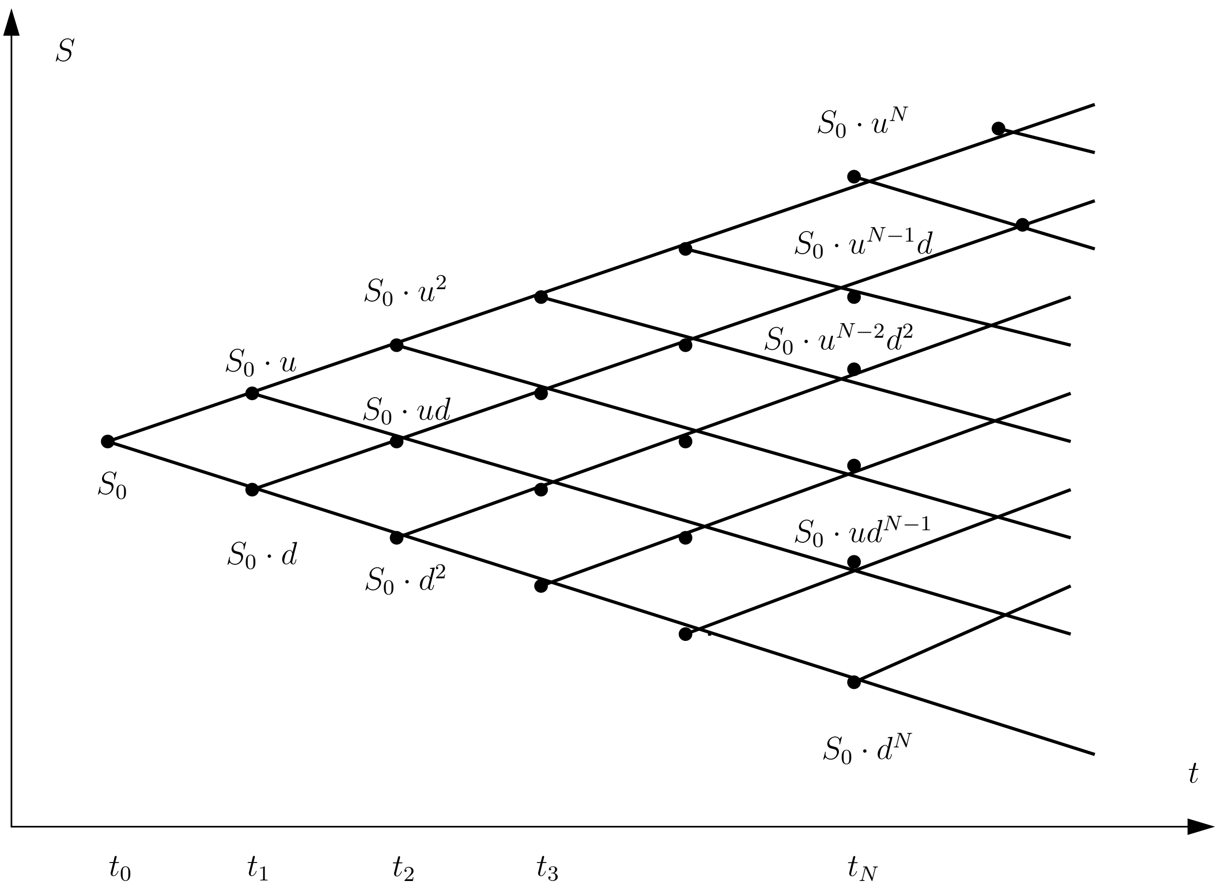
Introduisons un autre indice "i" pour calculer le prix de l'action à chaque noeud de l'arbre

$$S(n, i) = (u)^i (d)^{n-i} S_0$$

• l'indice n est l'indice temporel

• l'indice i est l'indice d'une branche qui définit la valeur de l'action parmi $n + 1$ valeurs possibles :

$$0 \leq i \leq n$$



2. Option

L'option (Call) Européenne est un contrat avec une banque que donne la possibilité (pas l'obligation) d'acheter une action à la date $t = T$ avec le prix K bien défini en avance.

K est le prix d'exercice, il s'appelle "strike". T est le temps d'exercice.

A l'instant $t_N = T$ le prix le l'option est défini par la formule suivante:

$$V(T, S_N) = f_{pay-off}(S_N),$$

où $f_{pay-off}$ s'appelle la fonction pay-off.

Pour l'option européenne

$$f_{pay-off}(x) = max(x - K, 0)$$

Donc

$$f_{pay-off}(S_N) = max(S_N - K, 0)$$

Supposons vous achetez au prix K une action qui vaut S_N à la date $t = T$
• Si $S_N > K$ vous gagnez $S - K$
• Si $S_N < K$ vous n'exercez pas le contrat.

Exercice 1
Calculer le prix de l'option à $t = T$ pour chaque S_N et dessiner l'arbre.
Valeurs numériques:

$$\begin{cases} S_0 = 10, K = 10, u = 2, d = 1/2 \\ p = 1/3, N = 2 \end{cases}$$

Nous cherchons le prix de l'option à $t = 0$. C'est-à- dire nous cherchons $V(0, S_0)$.
Ce prix est représenté par l'espérance conditionnelle:

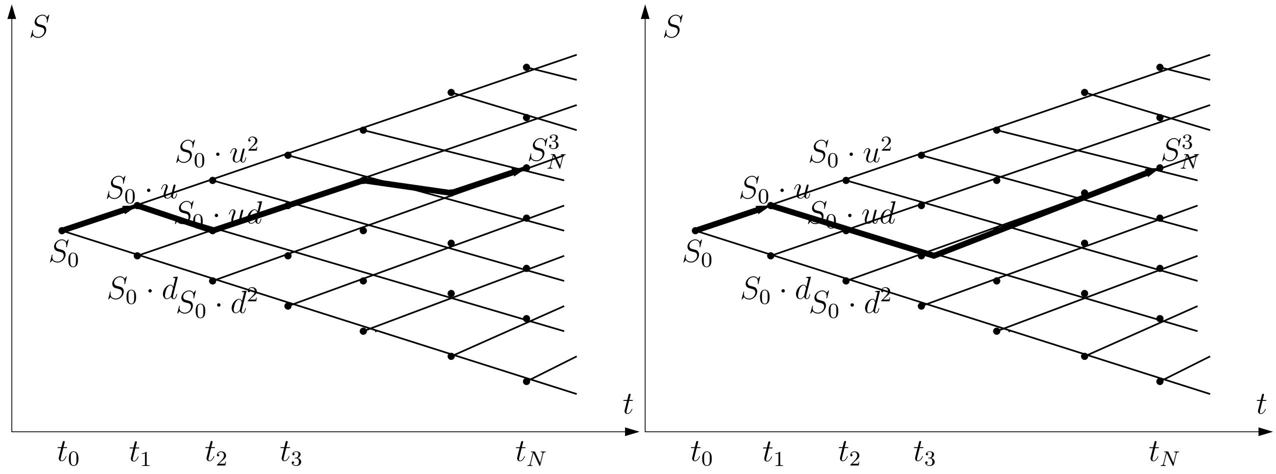
$$V(0, S_0) = e^{-rT} E[f_{pay-off}(S_N)/S_0]$$

C'est le célèbre théorème fondamental de valorisation des actifs financiers.
Il existe des méthodes différentes pour calculer ce prix:
• Résolutions (analytique et numérique) de l'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes
• Méthodes (numériques) de Monte - Carlo.
• Méthodes martingales (basées sur la théorie de processus stochastiques).
• Méthode Binomiale à N périodes.
• Méthode Trinomiale à N périodes.

Exercice 2
Calculer le prix de l'option à $t = 0$ avec le modèle Binomial.
Valeurs numériques:

$$\begin{cases} S_0 = 10, K = 10, u = 2, d = 1/2 \\ p = 1/3, N = 2 \end{cases}$$

Pour grand arbre ($N \to \infty$) il n'est pas simple de calculer les probabilités de chaque branche qui conduit à une S_N. Par exemple, sur le dessin vous ne voyez que deux branches seulement.



On développe donc une méthode beaucoup plus élegante (Méthode Binomiale) pour calculer $V(0, S_0)$. Cette méthode est itérative, rapide et elle représente de plus un bon exemple de programmation dynamique.

Considérons une branche dans l'arbre binômial. Il est important de comprendre que $\forall$ fonction f bornée l'espérance conditionnelle

$$E[f(S_{n+1})/S_n = x] = \sum_{y \in \{xu, xd\}} P(x,y) f(y)$$

Donc

$$E[f(S_{n+1})/S_n = x] = pf(u \cdot x) + (1-p) f(d \cdot x)$$

Nous cherchons le prix de l'option à $t = 0$

$$V(0, S_0) = e^{-rT} E[f_{pay-off}(S_N)/S_0]$$

Pour pouvoir implémenter numériquement la méthode introduisons une fonction

$$v(n,x) : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

avec les propriétés

$$\begin{cases} v(N,y) = f_{pay-off}(y) \\ v(n,x) = e^{-r\Delta t} \sum_{y \in \{xu,xd\}} P(x,y) v(n+1,y) \end{cases}$$

L'équation

$$v(n,x) = e^{-r\Delta t} \sum_{y \in \{xu,xd\}} P(x,y) v(n+1,y)$$

s'appelle l'équation dynamique pour l'arbre binomial. On en déduit que

$$e^{-r(T-t_n)} E[f_{pay-off}(S_N)/S_n] = v(n, S_n)$$

et

$$e^{-rT} E[f_{pay-off}(S_N)/S_0] = v(0, S_0)$$

Alors le prix de l'option à $t = 0$

$$V(0, S_0) = v(0, S_0)$$

Demonstration

Soit $x = S_n$ et par l'équation dynamique

$$v(t_n, S_n) = e^{-r\Delta t}(p\, v(t_{n+1}, uS_n) + (1-p)\, v(t_{n+1}, dS_n))$$

Les prix à la maturité sont connus :

$$v(n, S_N) = max(S_N - K, 0)$$

Montrons que

$$v(0, S_0) = e^{-rT} E[f_{pay-off}(S_N)/S_0]$$

En effet

$$v(t_{N-1}, S_{N-1}) = e^{-r\Delta t}(p\, v(t_N, uS_{N-1}) + (1-p)\, v(t_N, dS_{N-1})) = e^{-r\Delta t} E[f_{pay-off}(S_N)/S_{N-1}]$$

$$v(t_{N-2}, S_{N-2}) = e^{-r\Delta t}(p\, v(t_{N-1}, uS_{N-2}) + (1-p)\, v(t_{N-1}, dS_{N-2})) = e^{-r\Delta t} E[v(t_{N-1}, S_{N-1})/S_{N-2}] =$$
$$e^{-2r\Delta t} E[E[f_{pay-off}(S_N)/S_{N-1}]/S_{N-2}]] = e^{-2r\Delta t} E[f_{pay-off}(S_N)/S_{N-2}]$$

On continue le raisonnement jusqu'au $t = 0$

3. Algorithme

A chaque noeud de l'arbre binomial caracterisé par les indices (n, i) on associe le prix de l'actif $S(n, i)$ et le prix de l'option $v(n, i)$.

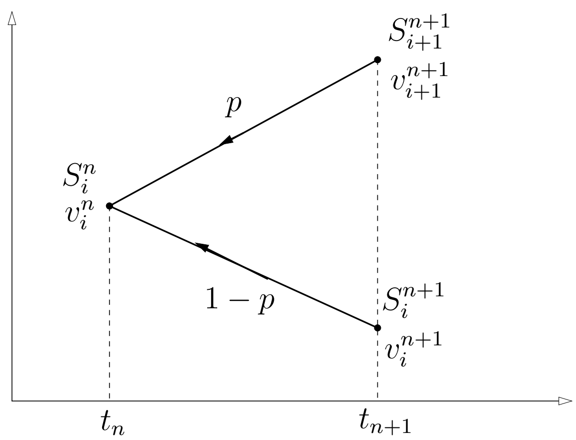
Explicitons l'équation dynamique

$$v(n, x) = e^{-r\Delta t}(p\, v(n+1, xu) + (1-p)\, v(n+1, xd))$$

et au lieu de

$x = S_i^n$ injectons l'indice i qui définie le prix de l'option à l'instant t_n et

au lieu de $xu = S_{i+1}^{n+1}$ et $xd = S_i^{n+1}$ injectons les indices $i+1$ et i qui définie les prix de l'option à l'instant t_{n+1}.



On obtient

$$v(n,i) = e^{-r\Delta t}(p\, v(n+1,i+1) + (1-p)\, v(n+1,i))$$

On applique cette équation en remontant le temps:

1) On définit le prix de l'option á la maturité:

$$v(N,i) = f_{pay-off}(N,i) \qquad i = 0 : N$$

Pour le Call Européenne

$$f_{pay-off}(N,i) = max(S(N,i) - K, 0).$$

2) On forme deux boucles

$$\begin{cases} \quad for \quad n = N-1 : -1 : 0 \\ \quad for \quad i = 0 : 1 : n \\ v(n,i) = e^{-r\Delta t}(p \cdot v(n+1,i+1) + (1-p) \cdot v(n+1,i)) \\ \quad end \\ \quad end \end{cases}$$

En effet, on tourne l'algorithme à la main:

$$si \quad n = N-1, \quad i = 0 \quad v(N-1,0) = e^{-r\Delta t}(p \cdot v(N,1) + (1-p) \cdot v(N,0))$$

$$si \quad n = N-1, \quad i = 1 \quad v(N-1,1) = e^{-r\Delta t}(p \cdot v(N,2) + (1-p) \cdot v(N,1))$$

...

$$si \quad n = N-1, \quad i = N-1 \quad v(N-1,N-1) = e^{-r\Delta t}(p \cdot v(N,N) + (1-p) \cdot v(N,N-1))$$

Les prix $v(N,0)$, $v(N,1)$, $...v(N,N)$ sont connus (prix à la maturité). On a calculé donc tout les prix de l'option à l'instant t_{N-1}. On pose puis $n = N - 2$et on continue vers $n = 0$.

4. Définitions des paramètres u, d, p

Comment fixer u, d, p?

• **Méthode 1 pour fixer les paramètres.**

On impose que pour $N \to \infty$ le modéle Binomiale discret converge en loi vers le modéle continu de Black et Sholes.

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S_T \qquad S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)^T + \sigma W_T}$$

Ici W_T est la valeur finale du mouvement Brownien qui suit la loi Normale $N(0,T)$. Le prix final de l'action suit la loi lognormale.

Nous avons défini le prix de l'action en chaque noeud de l'arbre

$$S(n,i) = (u)^i (d)^{n-i} S_0$$

Introduisons les variables aléatoires discrétes de Bernoulli R_k indépendantes.

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{P}[R_k = 1] = p \\ \mathbb{P}[R_k = 0] = 1 - p \end{array} \right.$$

Introduisons la variable aléatoire S_n qui représente un des $n+1$ prix possibles à l'instant t_n:

$$S_n = S_0 u^{(\sum_{k=1}^n R_k)} d^{(n - \sum_{k=1}^n R_k)} = d^n (\frac{u}{d})^{(\sum_{k=1}^n R_k)}$$

Donc

$$\ln(\frac{S_n}{S_0}) = n\ \ln(d) + \ln(\frac{u}{d}) \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Du théorème de Limite Centrale

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^n R_k - np}{\sqrt{pn(1-p)}} \to N(0,1)$$

On en déduit que que pour grand n

$$\ln(\frac{S_n}{S_0}) = n(\ln(d) + p \ln(\frac{u}{d})) + \sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} N(0,1) \ln(\frac{u}{d})$$

Dans le modèle de BS

$$S_n = S_0 e^{(r - \sigma^2/2) n\Delta t - \sigma W_T}$$

Donc

$$\ln(\frac{S_n}{S_0}) = (r - \frac{\sigma^2}{2}) n\Delta t + \sigma W_T = (r - \frac{\sigma^2}{2}) n\Delta t + \sigma\sqrt{n\Delta t} N(0,1)$$

Par identification on obtient deux relations

$$\ln(d) + p \ln(\frac{u}{d}) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t$$

$$\sqrt{p(1-p)} ln(\frac{u}{d}) = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

On fixe aussi $p = 1/2$. En résolvant le système linéaire on obtient

$$u = e^{\Delta t(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{\Delta t(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Exercice 3 (Devoir Maison)
Trouver u et d si on fixe $p = 1/3$.

- **Méthode 2 pour fixer les paramètres.**

Il existe une autre possibilité de fixer les paramètres.
Dans le modèle Binômial

$$E[\frac{S_{n+1}}{S_n} / S_n] = pu + (1-p)d$$

$$E[(\frac{S_{n+1}}{S_n})^2/S_n] = pu^2 + (1-p)d^2$$

Dans le modèle de BS

$$S_{n+1} = S_n e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma W_{\Delta t}}$$

Donc

$$E[\frac{S_{n+1}}{S_n}/S_n] = e^{r\Delta t}$$

$$E[(\frac{S_{n+1}}{S_n})^2/S_n] = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t}$$

Donc nous avons deux relations:

$$\begin{cases} pu + (1-p)d = e^{r\Delta t} \\ pu^2 + (1-p)d^2 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \end{cases}$$

Pour avoir l'arbre recombinant (ce que concerne surtout l'arbre trinomial) on impose souvent $ud = 1$.

On peut donc trouver

$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \end{cases}$$

5. Greques

A l'aide du modèle Binômial on peut calculer les Grecques. Par exemple, Delta de l'option Européenne est définie comme

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Cette notion est très importante pour les tradeurs.

• $\Delta_{n+1} - \Delta_n$ exprime la quantité des actions qu'il faut acheter (si $\Delta_{n+1} - \Delta_n > 0$) entre les moments t_{n+1} et t_n ou vendre (si $\Delta_{n+1} - \Delta_n < 0$) pour couvrir une option (protéger une option). En anglais cette procédure s'appelle Hedging.

Option Européene. Travail à faire

Regarder au même temps la Réalisation Scilab à la suite.

1. Introduire le vecteur $S(N, i)$:
Définir les prix de l'action $\forall i$ à l'instant $t_N = T$, c'est-à- dire à la muturité.

$$S(N, i) = S_0(u)^i(d)^{N-i}$$

2. Définir la fonction pay-off et les prix de l'option à $t = T$

$$v(N, i) = f_{pay-off}(S(N, i)) = max(S(N, i) - K, 0).$$

3. Introduire la matrice $v(n, i)$.

Utiliser l'équation dynamique

$$v(n,i) = e^{-r\Delta t}(pv(n+1,i+1) + (1-p)v(n+1,i))$$

et programmer en remontant le temps: faire deux boucles par rapport à "n" et par rapport à "i".

4. Trouver $V(0,S_0) \equiv v(0,0)$ le prix de l'option européenne.

5. Trouver $V(0,S_0)$ le prix de l'option européenne pour $p = 1/3$ et comparer avec le résultat precedent.

6. Ajouter une boucle supplémentaire qui va varier S_0 et tracer le graphe

$$S_0 \to V(0,S_0)$$

7. Calculer les Grecques de facon suivante: On remplace la dérivée par la différence finie:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(0,S_0) = \frac{V(0,S_0+h) - V(0,S_0-h)}{2h}$$

Programmer deux arbres binômials avec le prix initial $S_0 + h$ et $S_0 - h$. Pour h prenez une petite valeur 0.1.

Tracer le graphe

$$S_0 \to \Delta(0,S_0)$$

Valeurs numériques:

$$\begin{cases} K = 10, \\ p = 1/2, N = 100 \\ \sigma = 0.5, r = 0.1 \\ T = 0.5 \end{cases}$$

Réalisation Scilab

1. Créer fonction qui calcule le prix de l'option Européene pour une valeur fixe S_0: **function[prix]=option-europ-S0-fixe(S0)** avec le paramtre de sortie **prix**.

2. On fixe les paramètres: $r, N, T, p, u, d, K, deltat = T/N.$

$$u = e^{\Delta t(r-\frac{\sigma^2}{2})+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{\Delta t(r-\frac{\sigma^2}{2})-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

3. **En Scilab l'indice d'une matrice ne peut pas être égale à zero. On doit donc décaler l'indice n de 1: et l'indice i de 1:**

$$n = 1 : N+1, \qquad i = 1 : n$$

.

$$\left\{\begin{array}{c} for \quad i=1:N+1 \\ S(N+1,i)=S_0(u)^{i-1}(d)^{N-i+1}, \\ v(N+1,i)=max(S(N+1,i)-K,0) \\ end \end{array}\right.$$

On applique équation dynamique en remontant le temps:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{for} \quad \mathbf{n=N:-1:1} \\ for \quad i=1:1:n \\ v(n,i)=e^{-r\Delta t}(p\cdot v(n+1,i+1)+(1-p)\cdot v(n+1,i)) \\ end \\ end \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textbf{function}[\textbf{prix}] = \text{option-europ-S0-fixe}(S0). \\ \text{definitions des parametres} \\ \mathbf{for} \quad \mathbf{n=N:-1:1} \\ for \quad i=1:1:n \\ v(n,i)=e^{-r\Delta t}(p\cdot v(n+1,i+1)+(1-p)\cdot v(n+1,i)) \\ end \\ end \\ \textbf{prix} = v(1,1) \\ endfunction \end{array}\right.$$

4. On cherche **prix**=$v(1,1)$ pour $S_0=10$. Pour cela on appelle la fonction par

option-europ-S0-fixe(10).

5. Créer la fonction qui calcule le prix de l'option Européene pour chaque valeur de S_0 function **[price-option]=option-europ()** avec le vecteur de sortie **price-option**.

6. Créer une boucle sur S_0 et appeler la fonction qui calcule le prix pour chaque S_0.

$$\left\{\begin{array}{c} \text{function [price-option]=option-europ()} \\ for \quad k=1:41 \\ S0=0.5*(k-1) \\ \text{price-option(k)=option-europ-S0-fixe(S0)} \\ end \\ \text{Stock}=0.5*(0:40) \\ plot(\text{Stock,price-option}) \\ xlabel \quad 'prix\ de\ S0' \\ ylabel \quad 'prix\ de\ loption' \\ title \quad 'Prix\ de\ loption\ Europeenne' \\ endfunction \end{array}\right.$$

Remarquez que le paramètre de sortie **price-option** est un vecteur. **Stock** l'est aussi. De même taille. Il est légitime donc d'utiliser **plot**.

Appeler la fonction par **option-europ()** pour obtenir le graphe du Call Européene.

Option Americaine. Travail à faire

Une personne qui possède une option américaine peut l'exercer à n'importe quel moment $t_n \in [0,T]$. Donc la fonction pay-off s'écrit de la forme

$$Call_{pay-off} = max(S(n,i) - K, 0)$$

$$Put_{pay-off} = max(K - S(n,i), 0)$$

A chaque noeud d'arbre on doit implémenter pour chaque t_n une fonction de comparaison entre la valeur intrinsèque du pay-off et la valeur de l'option obtenues par la programmation dynamique.

$$v_{am}(n,i) = max(Put_{pay-off}(S(n,i)), e^{-r\Delta t}(pv_{am}(n+1,i+1) + (1-p)v_{am}(n+1,i))$$

$$v_{am}(n,i) = max(max(K - S(n,i), 0), e^{-r\Delta t}(pv_{am}(n+1,i+1) + (1-p)v_{am}(n+1,i))$$

9. Trouver le prix de l'option américaine Put et tracer le graphe

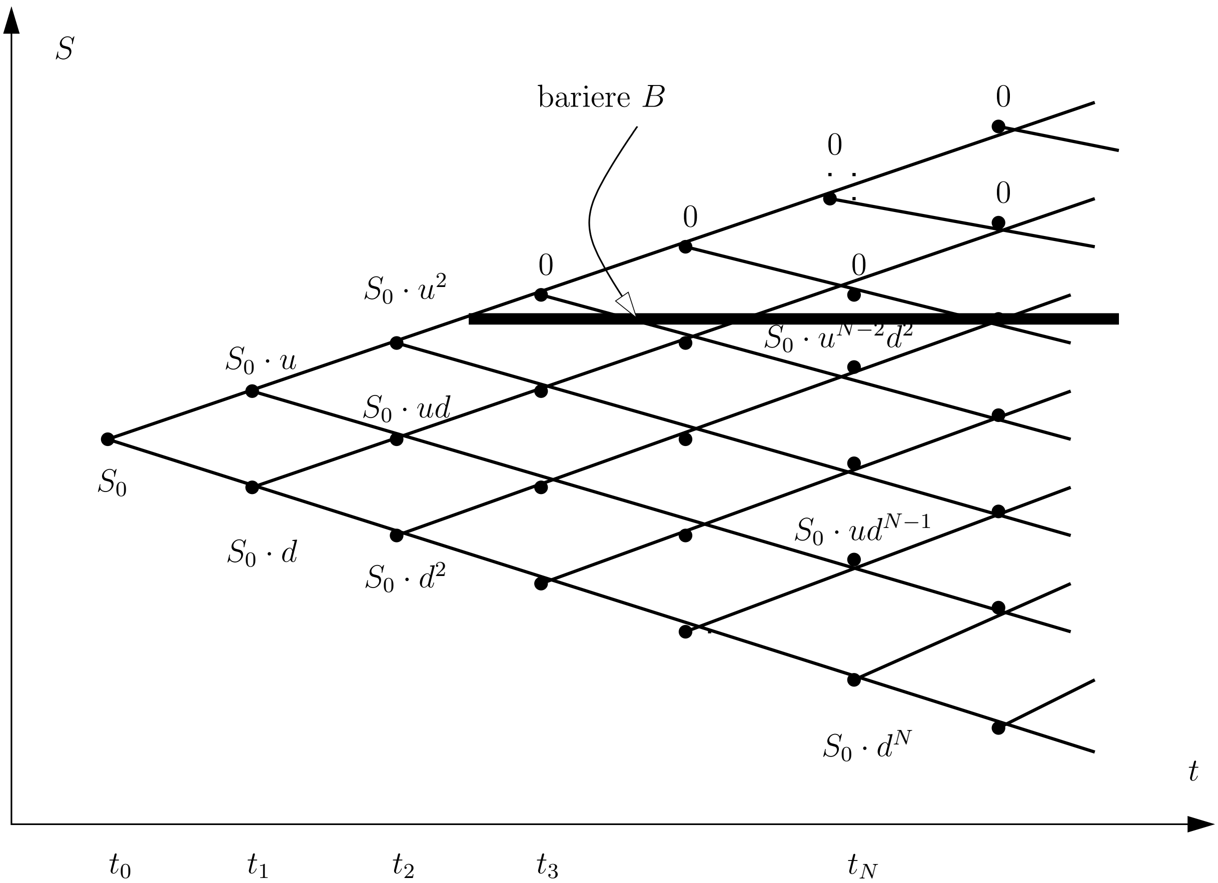
$$S_0 \to V_{americaine}(0, S_0)$$

Option Exotique: Barrière Knock-Out. Travail à faire

On définit l'option barrière de la facon suivante: Si $S(t_n)$ touche une Barrère B :

$$S(t_n) \geq B$$

la vie de l'option prend fin et on donne la valeur zéro au prix de l'option.



10. Programmer l'option Barrière Knock-Out. Pour cela
a) modifier la fonction pay-off de l'option:

$$Si \quad S(N+1,i) \geq B \quad v_{bariere}(N+1,i) = 0$$

b) modifier la programmation dynamique:

$$Si \quad S(n,i) > B \quad alors \quad v(n,i) = 0$$

c) tracer le graphe

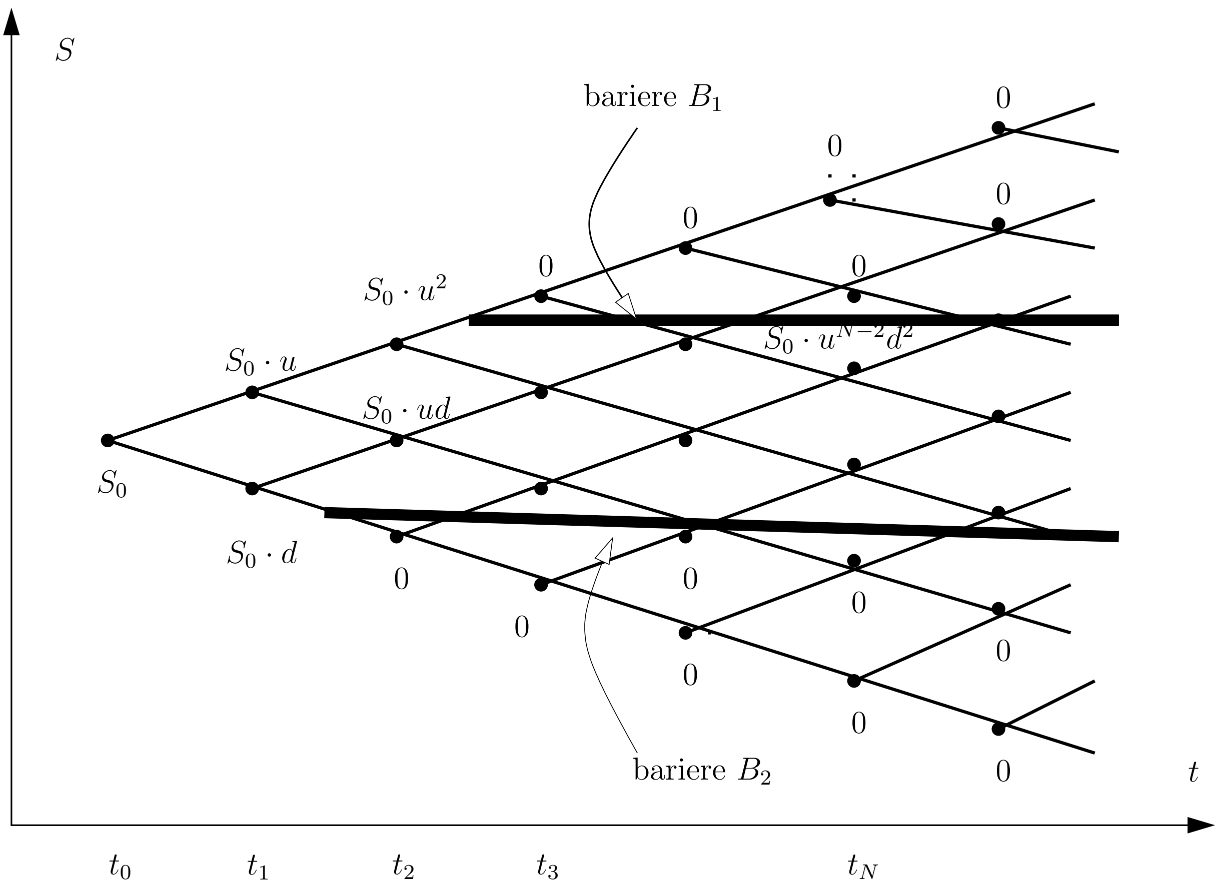
$$S_0 \to V_{bariere}(0, S_0)$$

Option Exotique: Double Barrìere Knock-Out. Travail à faire

On définit l'option double-barrière par l'idée suivante: Si $S(t_n)$ touche deux Barrères B_1 et B_2 :

$$S(t_n) \geq B_1 \quad ou \quad S(t_n) \leq B_2$$

la vie de l'option prend fin et on donne la valeur zéro au prix de l'option.

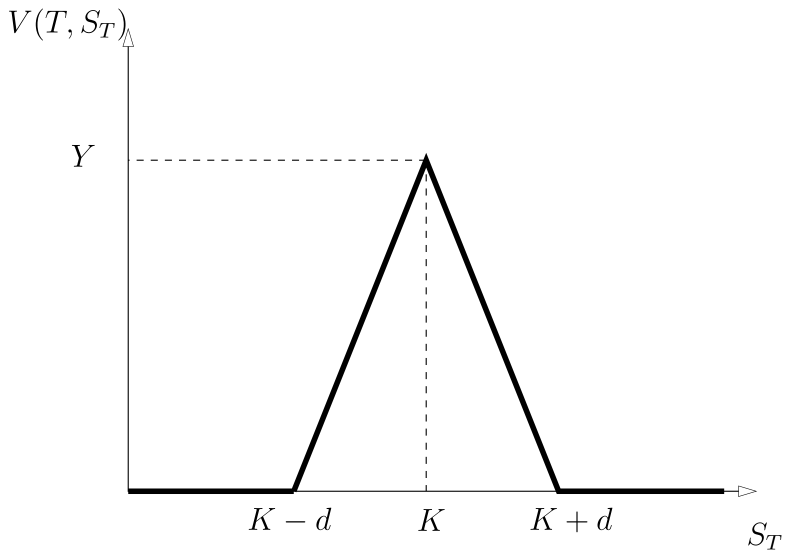


11. Programmer l'option Double Barrière Knock-Out.
Valeurs numériques:

$$\begin{cases} K = 10, \\ p = 1/2, N = 200 \\ \sigma = 0.5, r = 0.1 \\ T = 0.5, B_1 = 15, B_2 = 10 \end{cases}$$

Option "Butterfly"

La fonction pay-off de l'option Butterfly est presenté par le graphe:



Ecrire le programme qui calcule le prix de l'option "Butterfly".
Tracer le graphe de l'option.
Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20 \\ K = 10 \\ T = 0.5 \\ r = 0.1 \\ \sigma = 0.5 \\ N = 99 \\ Y = 15 \\ d = 5 \end{cases}$$