Projet d'analyse fonctionnelle

Yoann Le Bars[*1] and Nelly Barrau[†2]

[1]*EISTI, Avenue du parc, 95011 Cergy-Pontoise Cedex*
[2]*EISTI, 2, boulevard Lucien Favre – CS, 64075 Pau Cedex*

26 janvier 2017

Figure 1 – La grande salle de la Philharmonie de Paris – photo de BastienM sous licence Creative Commons Attribution – Sans altération 4.0 internationale.

[*] yoann@le-bars.net
[†] nbu@eisti.eu

1 Présentation

La nouvelle salle de concert de la Philharmonie de Paris (Philharmonie 1) a été inaugurée le 14 janvier 2015. Elle est dédiée à des concerts de musiques d'origines diverses, la plupart mettant en jeu des instruments non amplifiés, même si certaines pièces peuvent au contraire nécessiter un système d'amplification.

La salle doit donc permettre une écoute confortable non seulement pour l'auditeur, mais aussi pour les musiciens sur scène, ceci avec ou sans amplification. Elle doit également proposer des conditions acoustiques en accord avec celles prévus pour la pièce qui est donnée : par exemple, la musique religieuse catholique est souvent écrite pour des lieux à forte réverbération tels que des églises ou des cathédrales, alors qu'au contraire une grande partie des musiques du monde sont prévues pour être jouées en plein air et ne s'accommoderaient pas d'une réverbération trop importante.

Pour pouvoir s'adapter à ces conditions diverses, des dispositifs ont été mis en place permettant d'adapter tant la configuration spatiale de la salle que le revêtement de ses parois. La conception de la salle a donc fait appel à diverses méthodes permettant de prévoir quelles en seraient les caractéristiques acoustiques en fonction de la configuration sélectionnée. Parmi ces méthodes, il y avait l'analyse numérique sur ordinateur.

2 Le problème

Une onde sonore se propage dans un milieu gazeux (tel l'atmosphère) par variation de la pression. En nous plaçant dans l'espace à trois dimensions, soit $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\intercal$ un point ponctuel de cet espace, t la dimension temporelle (en s), $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^\intercal$ l'opérateur nabla en trois dimensions et $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ l'opérateur laplacien en trois dimensions. Soient :

- $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la variation de la pression (en Pa) ;
- $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ la vitesse de propagation du son dans le milieu considéré (en $\mathrm{m\,s^{-1}}$) ;
- $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le terme de source sonore.

La propagation d'une onde sonore est régie par l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}. \tag{1}$$

En posant $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ l'opérateur d'onde (ou d'alembertien), l'équation (1) est parfois écrite ainsi :

$$\Box \boldsymbol{u} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{f}. \tag{2}$$

La configuration de la salle est prise en compte par la définition géométrique du domaine d'étude $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. La salle étant finie, Ω est un espace borné et ses parois l'isolant du milieu extérieur, Ω est fermé, donc compact. Les propriétés acoustiques des divers revêtements – aux sol, plafond et murs – sont quant à elles prises en compte à l'aide des conditions aux limites. Concernant la salle Philharmonie 1, les murs sont traités de telle sorte que la situation acoustique à l'extérieur n'influence pas la situation acoustique à l'intérieur et réciproquement. Mathématiquement, cela se traduit par des conditions aux limites de type Dirichlet. Sur la frontière de Ω, notée $\partial\Omega$, avec $\boldsymbol{u}_f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la fonction exprimant le comportement acoustique aux paroies, les conditions de Dirichlet s'expriment ainsi :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_f \tag{3}$$

Soit $\boldsymbol{u}_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la configuration initiale et $\boldsymbol{v}_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la vitesse initiale. Le phénomène étudié commence dans une situation de départ, appelée état initial, décrite par les équations suivantes sur Ω :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})\,; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\,. \tag{5}$$

3 Résolution

Ce projet vous propose de réaliser l'analyse fonctionnelle de ce problème, préalable à sa résolution par des méthodes d'analyse numérique. Il vous est donc demandé de réaliser les étapes suivantes :

1. déterminer s'il existe une solution au problème et si elle est unique ;
2. réaliser le programme d'analyse fonctionnelle proprement dit :
   (a) déterminer la formulation variationnelle du problème et montrer que toute solution classique est également une solution faible ;
   (b) établir l'existence et l'unicité d'une solution faible ;
   (c) déterminer la régularité de la solution faible ;
   (d) montrer qu'une solution faible est également une solution classique.

L'équation d'onde a été étudiée en détail, on pourra par exemple se reporter à Lions et Magnes (1968). Pour simplifier cette étude, nous allons étudier le cas homogène, c'est-à-dire quand les solutions aux limites s'annulent, sans terme source. Notons $\mathring{\Omega}$ l'intérieur de l'espace Ω. $\mathring{\Omega}$ est un ouvert, $\Omega = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega$ et $\mathring{\Omega} \cap \partial\Omega = \varnothing$. Il s'agit donc d'étudier le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \mathring{\Omega} \times]0\,;+\infty[\\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0\,;+\infty[\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{6}$$

Pour réaliser la première étape, on pourra constater que l'équation $\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \boldsymbol{u} = 0$ peut être exprimée sous la forme du système du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \boldsymbol{v} = 0 & \text{sur } \mathring{\Omega} \times]0\,;+\infty[\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - c^2 \Delta \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \mathring{\Omega} \times]0\,;+\infty[\end{cases} \tag{7}$$

En posant $U = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^\intercal$, le système (7) devient :

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0, \tag{8}$$

avec :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -c^2\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -c^2\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v} \\ -c^2 \Delta \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{9}$$

et :

$$\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Soit $\cdot$ le produit scalaire usuel. Appliquer alors la théorie de Hille-Yosida (voir par exemple Brezis 1999) dans l'espace $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(U_1, U_2)_H = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{u}_2 \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \, d\boldsymbol{x}$$

où

$$U_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Références

BREZIS, Haïm (1999). *Analyse fonctionnelle.* 2e éd. Dunod.

LIONS, Jacques-Louis et Enrico MAGNES (1968). *Problèmes aux limites non homogènes.* Dunod.