



Sommaire :

| | |
|--|----------|
| 1 Parcimonie | 1 |
| 2 Traitement de signal | 1 |
| 2.1 Représentation d'un signal | 2 |
| 2.2 Phase d'acquisition | 3 |
| 2.3 Phase de reconstruction | 4 |
| 3 Matrices de mesure | 5 |
| 3.1 Cohérence mutuelle | 6 |
| 3.2 Exemples de matrices de mesure | 6 |
| 4 Références | 7 |

1 | Parcimonie

"A signal is sparse if most of its coefficients are (approximately) zero¹". Les représentations parcimonieuses connaissent une évolution croissante depuis quelques années pour la communauté du traitement du signal et des images. La représentation parcimonieuse résultante a plusieurs avantages :

1. elle permet de représenter de façon optimale chaque signal grâce à un sous-ensemble spécifique des composantes redondantes disponibles,
2. elle permet de réduire la taille des données, avec un taux de fidélité/perte maîtrisable,
3. elle permet de ne garder que l'information utile de manière condensée.
4. de présenter à un utilisateur les données étudiées, en ne gardant que l'information utile et ce, de manière condensée.

2 | Traitement de signal

En termes mathématiques, un signal est une fonction d'une, deux ou trois variables. On peut distinguer des exemples de signaux réels en biologie, finance, acoustique, sismique, image On peut classifier les signaux selon leur dimension

- Signal monodimensionnel 1D : fonction d'un paramètre unique, par exemple le temps, la température,

1. Sparsity [Allen Y. Yang].

- Signal bidimensionnel 2D : fonction de deux paramètres. Exemple : une image.
- Signal tridimensionnel 3D : fonction de trois paramètres. Exemple : une vidéo.

Le traitement de signal est un ensemble des techniques permettant de créer, d'analyser, de transformer les signaux en vue de leur exploitation. On peut distinguer quelques exemples d'applications concrètes comme le débruitage afin d'améliorer la qualité perçue, la compression afin réduire la taille du codage de l'image sans changer sa perception, la reconnaissance de formes...



FIGURE 1 – Application du traitement de signal : débruitage



FIGURE 2 – Application du traitement de signal : compression

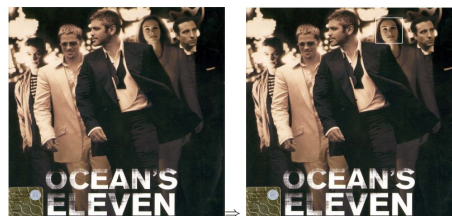


FIGURE 3 – Application du traitement de signal : reconnaissances de formes

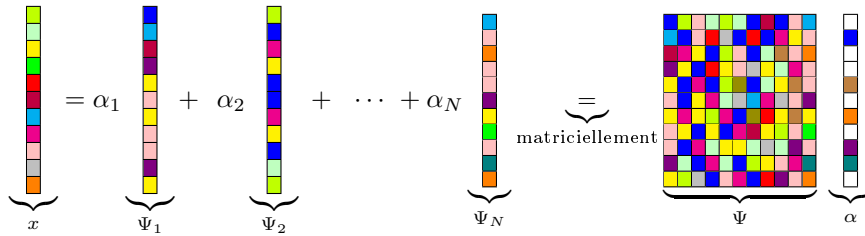
2.1 Représentation d'un signal

Pour un signal à N échantillons, on décrit les composantes de ce signal sur une base \mathcal{B} sur laquelle la représentation est unique, par exemple

- base de Fourier,
- base d'ondelettes orthogonales,
- base en cosinus discrets ...

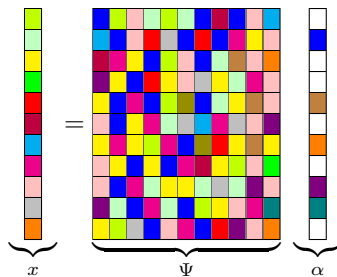
On note $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ la donnée de N échantillons d'un signal réel : $x \in \mathbb{R}^N$. Le changement de base nous fournit une nouvelle base $\mathcal{B} = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ de \mathbb{R}^N . sur laquelle la représentation de x est unique :

$$x = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i.$$



Pour chaque signal, une base est adaptée selon le traitement souhaité. Dans les faits, on cherche à obtenir une représentation parcimonieuse $\alpha \in E'$ de x dans une base (ou dictionnaire) Ψ **adéquate** :

$$x = \Psi \alpha.$$

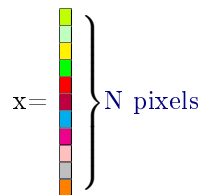


Lorsque Ψ est une base orthonormale :

$$x = \sum_{i=1}^N \underbrace{\langle x, \Psi_i \rangle}_{\alpha_i} \Psi_i.$$

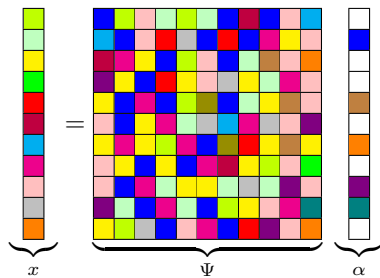
2.2 Phase d'acquisition

On représente nos données dans un espace E sous forme d'un vecteur unidimensionnel x ,

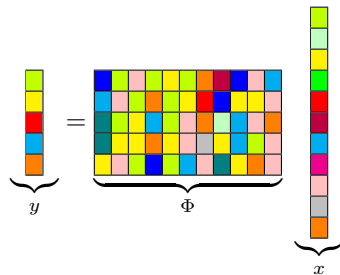


On souhaite changer l'espace de représentation $E \rightarrow E'$ afin d'obtenir une nouvelle représentation parcimonieuse $\alpha \in E'$ de x dans une base (ou dictionnaire) Ψ **adéquate** :

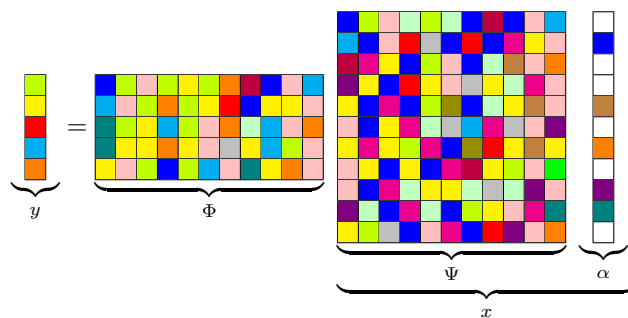
$$x = \Psi \alpha.$$



On prend M mesures linéaires du signal $x : y_i = \langle x, \varphi_i \rangle$, $i = 1, \dots, M$ avec $M \ll N$. On représente le processus de mesure (acquisition) par la matrice $\Phi : y = \Phi x$.



On utilise la représentation parcimonieuse α de x :



On définit la matrice $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ et le **procédé d'acquisition et de mesure** nous donne : $y = \mathbf{A}\alpha$. Le signal est supposé non parcimonieux dans le domaine temporel mais a une représentation parcimonieuse dans un domaine Ψ particulier. Dans le cas contraire, Ψ est une matrice identité, $\Psi = I$. En tenant compte de la présence de bruit additif pendant la phase d'acquisition, l'équation devient :

$$y = \mathbf{A}\alpha + \epsilon \quad (1)$$

où ϵ est un vecteur représentant le bruit.

2.3 Phase de reconstruction

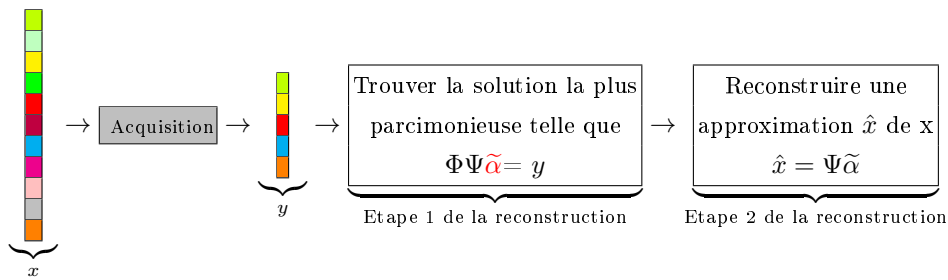
Le procédé de la reconstruction d'un signal original x se fait à partir du vecteur de mesure y , de la matrice de mesure Φ et de la matrice du domaine Ψ .

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

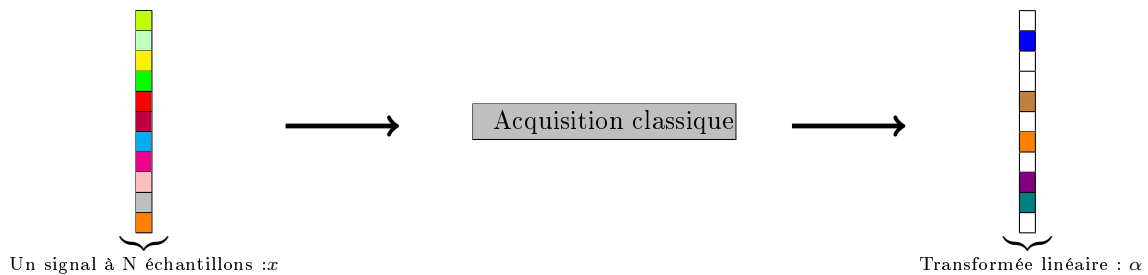
- α est dit s -parcimonieux lorsque le nombre de composantes non nulles de α est inférieur à s .
- On note par $\|\alpha\|_0$ le cardinal du support de α où $\text{supp}(\alpha) = \left\{ \alpha_i, \alpha_i \neq 0, i \in \llbracket 1, N \rrbracket \right\}$.

On l'appelle la norme ℓ_0 . La notation $\|\cdot\|_0$ est abusive, il ne s'agit pas ici d'une norme.

La phase de reconstruction d'un signal se fait en deux étapes :

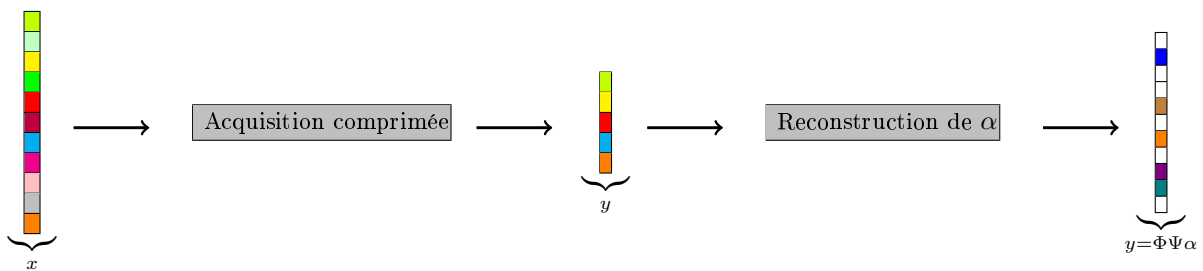


Le principe classique de l'acquisition



Choisir un dictionnaire adéquat Ψ : Transformée en Cosinus Discrète

Les étapes du compressive sensing



Choisir une matrice de mesure adéquate Φ : Aléatoire ou Déterministe

3 | Matrices de mesure

Dans la plupart des cas, le signal à mesurer peut avoir une représentation **parcimonieuse** dans un domaine particulier. Le *Compressive Sensing* exploite cette information additionnelle pour capturer le signal à une fréquence en dessous de celle de Nyquist directement sous forme compressée et sans perte d'information.

On prend M mesures linéaires du signal $x : y_i = \langle x, \varphi_i \rangle, i = 1, \dots, M$ avec $M \ll N$. On représente le processus de mesure (acquisition) par la matrice Φ :

$$y = \Phi x$$

La matrice de mesure doit être conçue pour que la phase d'acquisition du Compressive Sensing n'altère pas l'information contenue dans le signal. La matrice de mesure intervient dans la phase d'acquisition du Compressive Sensing mais elle doit être conçue pour **assurer la reconstruction du signal**

parcimonieux. Elle doit donc répondre à des critères d'existence et d'unicité du signal reconstruit et doit remplir certaines conditions.

On définit la matrice $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ et le **procédé d'acquisition et de mesure** nous donne :

$$y = \mathbf{A}\alpha$$

Le problème à résoudre est donc de concevoir :

- une matrice de mesure Φ stable de façon que l'information pertinente dans tout signal s -parcimonieux en signal compressible ne soit pas altéré par la réduction de $x \in \mathbb{R}^N$ à $y \in \mathbb{R}^M$.
- un algorithme de reconstruction permettant de retrouver x à partir de M mesures.
- Une condition à respecter est l'**incohérence** qui stipule que les lignes $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,M}$ de Φ ne doivent pas représenter de façon parcimonieuse les colonnes $\{\Psi_j\}_{j=1,\dots,N}$ de Ψ et vice-versa.

3.1 Cohérence mutuelle

La cohérence mutuelle entre Φ et Ψ est définie comme suit

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{i,j} \frac{|\langle \Phi_i, \Psi_j \rangle|}{\|\Phi_i\|_2 \|\Psi_j\|_2}$$

où Φ_i et Ψ_j représentent respectivement les vecteurs lignes de Φ et les vecteurs colonnes de Ψ .

La cohérence mutuelle mesure la corrélation maximale entre les vecteurs lignes de Φ et les vecteurs colonnes de Ψ . La plage de valeurs de la cohérence mutuelle est

$$1 \leq \mu(\Phi, \Psi) \leq \sqrt{N}.$$

3.2 Exemples de matrices de mesure

- Φ_1 : matrice aléatoire générée à partir d'un processus uniformément distribué gaussien.
- Φ_2 : matrice aléatoire générée à partir d'un processus bernoullien $\{-1, 1\}$.
(Si $\text{rand}() < p$ alors $X=-1$ sinon $X=1$).
- Φ_3 : matrice aléatoire générée à partir d'un processus bernoullien $\{0, 1\}$.
- Φ_4 : matrice aléatoire générée à partir d'un processus gaussien identique et indépendamment distribué (i.i.d) avec une moyenne nulle et une variance $\frac{1}{M}$: $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{M}\right)$;
- Φ_5 : matrice creuse ou parcimonieuse générée de façon aléatoire.
- Φ_6 : matrice de Topelitz avec des bolos diagonaux de taille $1 \times \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{M}} \right\rfloor$ contenant 1 et les éléments extra-digonaux nuls.

4 | Références

1. An Introduction To Compressive Sampling, Emmanuel J. Candès and Michael B. Wakin, *EEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE*, MARCH 2008.
2. Compressive sampling, Emannuel J. Candès, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006, European Mathematical Society.
3. Thèse : Représentations parcimonieuses pour les signaux multivariés - Quentin Barthélemy
4. Une petite introduction aux représentations parcimonieuses de signaux et d'images -Jérôme Landré 01-07-2008
5. Allen Y. Yang. Compressed sensing meets machine learning - classification of mixture subspace models via sparse representation. Mini Lectures in Image Processing, TRUST Center Seminar, University of California, Berkeley, USA, 2008.
6. Analyse Multi-Résolution et Ondelettes (AMO) Représentations des signaux 1D et 2D, Nicolas Thome Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6) Université Pierre et Marie Curie (UPMC) Master 2 Informatique - Spécialité IMA
7. Compressive sensing Richard G.Baraniuk *IEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE* [118] JULY 2007
8. R.G. Baraniuk. Compressive sensing [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*,
9. [DE03] David L. Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*,
10. Approche d'eterministe de l'acquisition comprimée et la reconstruction des signaux issus de capteurs intelligents distribués THESE présentée et soutenue publiquement le 9 novembre 2015 pour l'obtention du Doctorat de l'Université de Lorraine (mention systèmes électroniques) par Andrianiaina Ravelomanantsoa
11. A User's Guide to Compressed Sensing for Communications Systems Kazunori HAYASHI, Masaaki NAGAHARA, and Toshiyuki TANAHA, *IEICE TRANS COMMUN*, VOL.E96-B, NO.3 MARCH 2013
12. D.L Donoho, "Compressed sensing", *IEEE Tran Inf. Theory*, vol52, no.4, pp. 1289-1306 April 2006.
13. E.J. Candès and T.Tao, "Decoding by linear programming"; *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol.51, no12, pp.4203-4215, Dec.2005
14. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso, Robert Tibshirami, *journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Volume 58, Issue 1 (1996), 267-288
15. Compressed Sensing with Coherent and Redundant Dictionaries, Emmanuel J. Candès, Yonina C. Eldar, Deanna Needell, Paige Randall, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Volume 31, Issue 1, July 2011, Pages 59-73
16. Introduction au Compressed Sensing, notions de complexité algorithmique et relaxation convexe, Guillaume Lécué, CNRS, CREST, ENSAE.