

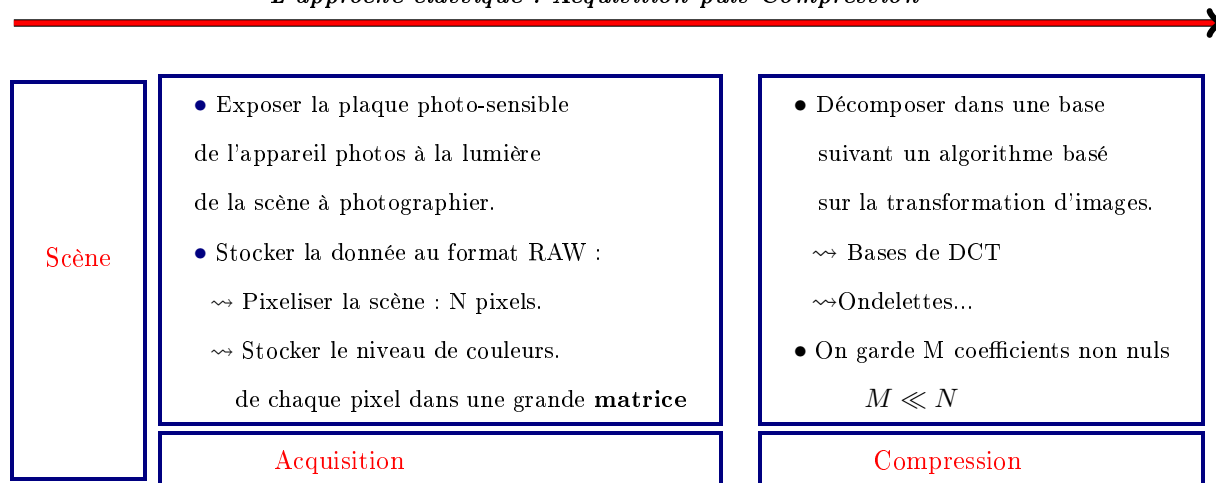


La performance des systèmes d’acquisition et la taille grandissante des mémoires de stockage ont donné naissance à la construction de grandes bases de données, composées d’une collection de signaux. L’exploitation postérieure de ces masses de données devient un problème crucial. L’enjeu est donc de trouver l’information utile au sein de cette masse de données. Cette quantité de données rend la compression nécessaire **avant** le stockage ou la transmission.

En exploration et analyse de données, il existe plusieurs approches pour traiter ce problème. En effet, les données acquises vivent souvent dans des espaces de grandes dimensions et sont souvent très redondantes, cependant, l’information utile enfouie dans ces données vit bien souvent dans des sous-espaces de petites dimensions. Ces données peuvent être représentées avec parcimonie, c’est à dire avec peu d’éléments.

Le théorème d’échantillonnage de Shannon-Nyquist : Pour éviter de perdre des informations lors de la capture d’un signal, on doit prélever à une fréquence au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale du signal : $f_e > 2f_{\max}$.

L’approche classique : Acquisition puis Compression



Le procédé de compression doit nous permettre de reconstruire l’image d’origine à partir de celle compressée sans trop de perte

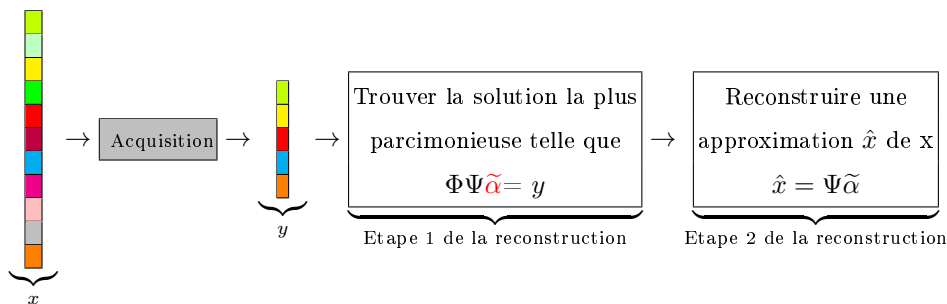
1 | Formulation du problème du Compressive Sensing

Pourquoi mesurer autant de données pour n'en garder que si peu? Pour contourner ce problème, Candès¹ et Tao² ont introduit le *Compressive Sensing* dans le traitement du signal :

- ↪ Acquérir directement des données compressées : ne mesurer que la quantité d'informations nécessaire pour la représentation du signal.
- ↪ Mesurer et compresser en même temps : **Acquisition Comprimée** (*Compressed Sensing*).

Dans la plupart des cas, le signal à mesurer peut avoir une représentation **parcimonieuse** dans un domaine particulier. Le *Compressive Sensing* exploite cette information additionnelle pour capturer le signal à une fréquence en dessous de celle de Nyquist directement sous forme compressée et sans perte d'information. Il s'appuie sur deux principes : la **parcimonie** et l'**incohérence**. Le procédé de la reconstruction d'un signal original x se fait à partir du vecteur de mesure y , de la matrice de mesure Φ et de la matrice du domaine Ψ .

La phase de reconstruction d'un signal se fait en deux étapes :



1. La première étape consiste à trouver le vecteur $\tilde{\alpha}$ correspondant à la solution de l'équation (1) ou (2) :

- En tenant compte de l'hypothèse que α est parcimonieux dans le domaine Ψ , l'étape 1 consiste à résoudre le problème de minimisation suivant qu'on appellera la minimisation (ℓ_0) :

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \text{ sous la contrainte } \mathbf{A}\tilde{\alpha} = y \quad (1)$$

- En tenant compte du bruit additif et de la parcimonie, l'équation s'écrit :

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \text{ sous la contrainte } \|y - \mathbf{A}\tilde{\alpha}\|_2 \leq \|\epsilon\|_2 \quad (2)$$

2. Une fois $\tilde{\alpha}$ obtenu, la dernière étape reconstruit le signal $\tilde{x} = \Psi\tilde{\alpha}$.

1. Emmanuel Candès -Mathématicien français né à Paris. Depuis 2009, il est professeur de mathématiques, de statistique et d'électrotechnique à l' université Stanford. Il travaille sur l'analyse harmonique numérique, l'analyse multi-échelle, la théorie de l'approximation, l'estimation statistique et la reconnaissance des formes, le traitement du signal, les problèmes inverses et le calcul scientifique, ainsi que l'informatique, l'optimisation mathématique et la théorie de l'information

2. Mathématicien médaillé Fields, travaille principalement dans les domaines de l'analyse harmonique, des équations aux dérivées partielles, de la combinatoire, de la théorie analytique des nombres et de la théorie des représentations. Professeur de mathématiques à l'université de Californie à Los Angeles (UCLA).

À l'issue de cette introduction au compressive sensing, des questions clés se posent :

- Pendant la **phase de mesure**, quelles sont les critères que la matrice de mesure Φ devrait satisfaire? Comment définir une "bonne" mesure permettant de compresser le signal mais en préservant la structure s-sparse du signal?
- Pendant la **phase de reconstruction**, comment reconstruire efficacement (sans perte ou avec perte contrôlée) le signal original à partir de y , Φ et Ψ ?
- Quel est le **nombre minimal de mesures** M nécessaires pour reconstruire correctement le signal original?

2 | À faire

Travail d'analyse

Décrire les différentes étapes du compressive sensing permettant de reconstruire un signal 1D à partir de M mesures. Ce document devra être composé d'une explication claire des concepts mathématiques et des algorithmes entrant en jeu.

Une partie explicative détaillée sur chaque étape est demandée. Vous devez également étoffer votre analyse d'un état de l'art complet sur les méthodes existantes, vous devez également expliquer la méthode OMP "Orthogonal matching pursuit" et la comparer avec une autre méthode (à vous de proposer une autre méthode). Votre travail sera basé sur la simulation de différents résultats de compressed sensing :

1. le choix de la matrice de mesure pour l'acquisition du signal,
2. l'analyse de la parcimonie d'un signal,
3. le choix particulier de la méthode OMP pour la reconstruction du signal,
4. le choix d'une autre méthode de reconstruction.
5. la comparaison des résultats avec des ratios de reconstruction différents et des bases de parcimonies différentes en utilisant un critère de la qualité de reconstruction.

Après cette phase d'analyse volontairement très ouverte, une mise au point commune aura lieu afin de permettre à tout le monde d'avancer dans le bon sens et d'avoir des objectifs clairs et précis.

Codage du programme

Le programme sera écrit dans un langage de votre choix. Le programme doit permettre d'exposer tout le procédé du compressive sensing : un signal d'origine fourni en référence, une présentation parcimonieuse de ce dernier, un signal mesuré à partir de l'original et le signal reconstitué à comparer

avec le signal d'origine.

Ce programme sera rendu avec un mode d'emploi permettant d'expliquer son utilisation. Aux fins de test, une archive contenant des signaux 1D doit être fournie avec votre travail.

Rapport et soutenance

Un rapport reprenant le travail d'analyse initial augmenté des aspects de réalisation sera fourni. Une soutenance viendra clôturer ce projet. La soutenance devra précisément mettre en évidence les résultats des simulations du compressive sensing avec différents ration et avoir un avis critique sur ces résultats.

3 | Modalités

Ce projet doit être réalisé par groupes de 3 élèves. Les rendus attendus sont les suivants :

- Jeudi 21 septembre 2018 : Un plan d'organisation et de répartition de taches vous sera demandé.
- Semaine?? 2018 : votre rapport et le travail d'analyse avec les résultats trouvés.
- Semaine?? 2018 : le rendu de votre programme. Seront notés la qualité du code et le bon fonctionnement de celui-ci.
- Semaine?? 2018 : une soutenance de présentation de votre travail d'une durée de 30 minutes par groupe.

4 | Références

1. An Introduction To Compressive Sampling, Emmanuel J. Candès and Michael B. Wakin, IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, MARCH 2008.
2. Compressive sampling, Emmanuel J. Candès, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, European Mathematical Society.
3. Thèse : Représentations parcimonieuses pour les signaux multivariés - Quentin Barthélemy
4. Une petite introduction aux représentations parcimonieuses de signaux et d'images -Jérôme Landré 01-07-2008
5. Allen Y. Yang. Compressed sensing meets machine learning - classification of mixture subspace models via sparse representation. Mini Lectures in Image Processing, TRUST Center Seminar, University of California, Berkeley, USA, 2008.
6. Analyse Multi-Résolution et Ondelettes (AMO) Représentations des signaux 1D et 2D, Nicolas Thome Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6) Université Pierre et Marie Curie (UPMC) Master 2 Informatique - Spécialité IMA
7. Compressive sensing Richard G.Baraniuk IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE [118] JULY 2007
8. R.G. Baraniuk. Compressive sensing [lecture notes]. IEEE Signal Processing Magazine,
9. [DE03] David L. Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l_1 minimization. Proceedings of the National Academy of Sciences,
10. Approche d'eterministe de l'acquisition comprimée et la reconstruction des signaux issus de capteurs intelligents distribués THESE présentée et soutenue publiquement le 9 novembre 2015 pour l'obtention du Doctorat de l'Université de Lorraine (mention systèmes électroniques) par Andrianiaina Ravelomanantsoa

11. A User's Guide to Compressed Sensing for Communications Systems Kazunori HAYASHI, Masaaki NAGAHARA, and Toshiyuki TANAHARA, IEICE TRANS COMMUN, VOL.E96-B, NO.3 MARCH 2013
12. D.L Donoho, "Compressed sensing", IEEE Tran Inf. Theory, vol52, no.4, pp. 1289-1306 April 2006.
13. E.J. Candes and T.Tao, "Decoding by linear programming"; IEEE Trans. Inf. Theory, Vol.51, no12, pp.4203-4215, Dec.2005
14. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso, Robert Tibshirami, journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Volume 58, Issue 1 (1996), 267-288
15. Compressed Sensing with Coherent and Redundant Dictionaries, Emmanuel J. Candes, Yonina C. Eldar, Deanna Needell, Paige Randall, Applied and Computational Harmonic Analysis, Volume 31, Issue 1, July 2011, Pages 59-73
16. Introduction au Compressed Sensing, notions de complexité algorithmique et relaxation convexe, Guillaume Lécué, CNRS, CREST, ENSAE.