*I. Kortchemski*

# E.I.S.T.I.⇒ CYTECH

**Spécialisation Génie Mathématique    2019-2020**

# PROJET : Simulation du modèle de Lundberg

**Ruine en Assurance**

## Contexte

L'assurance est un contrat de transfert de risques entre deux parties : l'assureur prend à son compte un risque (sinistres, dommages à la personne ...) en échange d'une cotisation versée par l'assuré. Les sociétés d'assurance s'appuient sur un grand nombre d'assurés pour mutualiser les risques (effet loi des grands nombres) ; en 2013 , le chiffre d'affaires de l'assurance en France dépasse les 180 milliards d'euros. L'évaluation de la solvabilité d'une société d'assurance est une question cruciale et complexe ; en 2008, le groupe américain AIG a du être renfloué par la Réserve Fédérale Américaine alors qu'il était au bord de la ruine, son capital ayant été largement déprécié suite à la crise des sub-primes. En Europe, la réforme réglementaire Solvabilité II impose de mieux mesurer les expositions aux risques, en évaluant par exemple les probabilités d'insolvabilité et de ruine. Afficher des excellents indicateurs de solvabilité sert aussi d'argument marketing auprès des clients.

Plus précisément, une compagnie d'assurance dispose d'un capital (fonds propres) ; elle perçoit régulièrement des cotisations de ses clients, et les indemnise en cas de sinistres. Cette compagnie propose en général des contrats de différents types liés aux différentes branches de son activité : assurance vie, complémentaire santé, assurance habitation,assurance automobile,assurance responsabilité civile, etc., avec des taux de cotisation qui dépendent de la fréquence des sinistres et de leur sévérité. Elle est ruinée lorsque les montants à rembourser sont supérieurs au capital de départ cumulé avec les cotisations perçues ; cela se produit en cas d'apparition de sinistres plus fréquents ou plus importants (catastrophes naturelles, épidémies. . .) ou si le capital initial et les cotisations sont insuffisants. Il est donc crucial de déterminer et/ou d'ajuster ces paramètres pour garantir la pérennité d'une compagnie d'assurance. Enfin, il est possible qu'une branche de l'assureur soit au bord de la ruine sans que l'assureur le soit globalement.

## Modélisation

Pour commencer, on considère une seule branche d'activité. La compagnie d'assurance

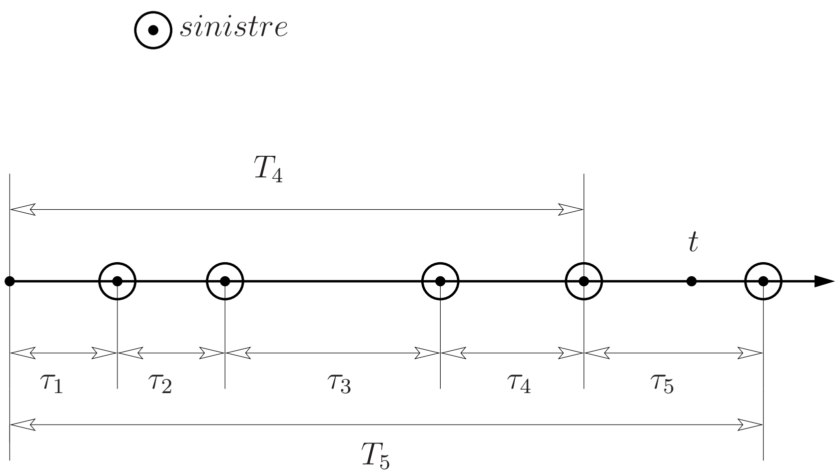
- perçoit des cotisations de ses clients, pour simplifier, en continu et uniformément réparties sur l'année. On note $c$ le taux de cotisation par unité de temps. Les recettes de la compagnie pendant un temps $t$ sont donc $c \cdot t$,

- verse des indemnités à ses assurés sinistrés en fonction des dommages subis.

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

On note

- $R_t$ est sa réserve à l'instant $t$
- $x$ est un capital de départ
- $c$ est le taux de cotisation par unité de temps.
- $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ les instants aléatoires des sinistres
- $(Z_k)_{k \geq 1}$ les dommages. Le montant du $k$ ème sinistre est modélisé par une variable aléatoire $Z_k$



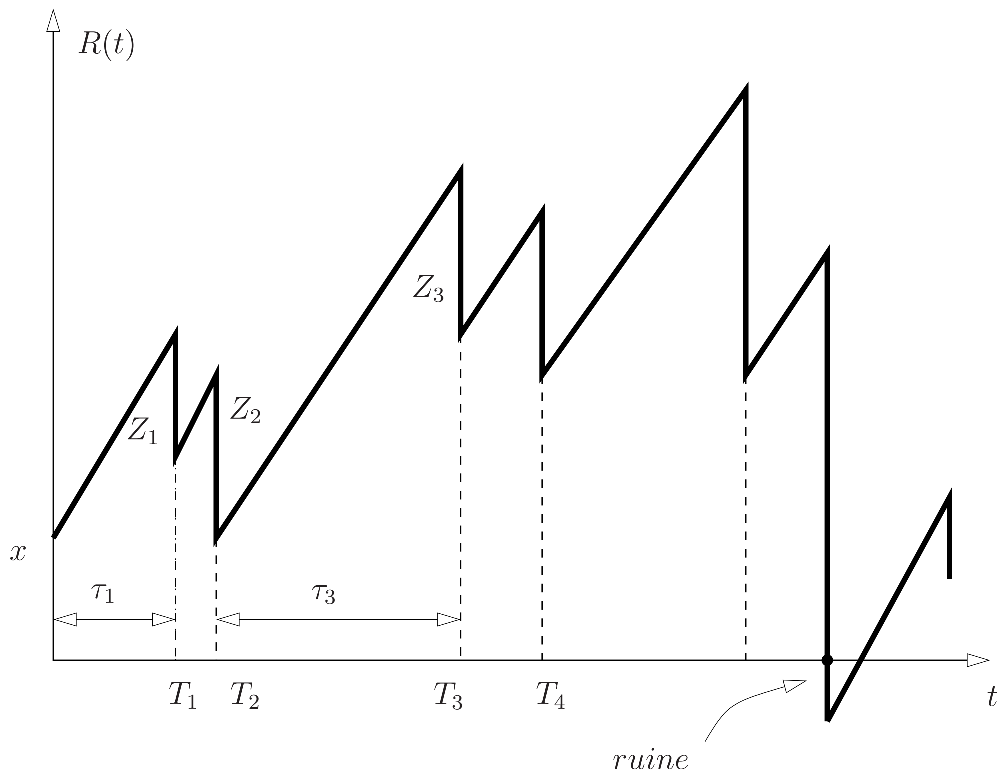

- le nombre de sinistres entre l'instant 0 et $t$ est modélise par le processus stochastique de comptage

$$N_t = \sum_{k=1} \mathbf{1}_{T_k \leq t}, \qquad T_k = \sum_{i=1}^{k} \tau_i, \quad t \in [0, T]$$

- $\tau_i$ les durées entre deux sinistres successifs
- le montant cumulé des sinistre est modélisé par un processus de Poisson composé $X_t$

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

**Modèle de Lundberg-Cromer, les paramètres.**




### Modélisation des sinistres

L'étude de la probabilité de ruine et notamment son comportement asymptotique vont dépendre significativement du type de la loi de $Z_k$ : queue fine ou lourde.

Historiquement, Lundberg et Cramer on fait leur étude pour les lois à queues fines, qui ont l'avantage d'être plus simples à manipuler. Cependant des études statistiques ont montré que des événements comme les catastrophes naturelles, tremblements de terres, des épidémies, ou les attaques terroristes, relativement rares mais d'un coût très élevé, ne peuvent être modélisés par des lois à queues fines. La théorie du risque s'est donc développée également pour des lois à queues lourdes.

- Lois à queues fines :

La loi des montants remboursés $(Z_k)_{k\geq 1}$ est à queue fine si il existe $\gamma > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\mathbb{P}[(Z_k) > x] < Ce^{-\gamma x}, \quad x \geq 0$$

Quelques lois de $Z_k$ à queues fines :

- la loi Gamma de paramètres $(\alpha;\beta)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$$

- la loi Exponentielle avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{x\geq 0}$$

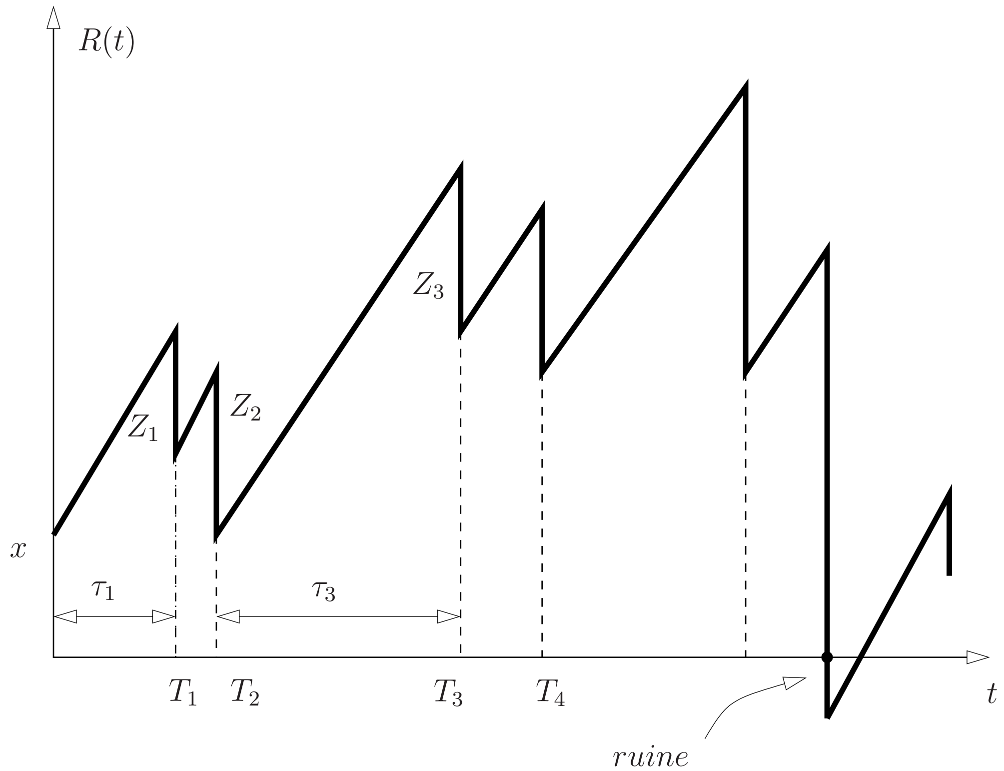
- la loi Weirbull $(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \frac{\alpha}{b^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha} \mathbb{I}_{x\geq 0}$$

Quelques lois de $Z_k$ à queues lourde :

- la loi Pareto $(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{x\geq \beta}$$




- Les durées entre deux sinistres successifs $(\tau_k)_{k\geq 1}$ définies par

$$\tau_k = T_k - T_{k-1},$$

sont supposées indépendantes entre elles et indépendantes des sinistres ; on suppose qu'elles sont distribuées suivant des variables exponentielles de paramètre $\lambda, \lambda > 0$.

**Ruine.**

- Ruine à l'horizon finie

La société est ruinée à l'horizon $T$ si la réserve $R_T$ est négative :

$$R_T = X + cT - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k < 0.$$

Nous sommes intéressés par la probabilité de ruine sur un horizon fini c'est à dire avant un instant donné $T$, défini par

$$\mathbb{P}[R_T < 0 | R(0) = X]$$

.

- Ruine à l'horizon infinie

Alternativement, on peut étudier les probabilités de survie sur un horizon infini.

La probabilité de ruine "éventuelle" (sur un horizon infini) est définie par :

$$\mathbb{P}[\exists t : R_t < 0 | R(0) = X].$$

Le temps de ruine est alors

$$\mathbb{T}_x = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}.$$

L'assureur a clairement intérêt à ce que la probabilité de ruine soit la plus petite possible. D'un point de vue mathématique, cette probabilité n'est pas facile a évaluer. L'objectif de ce projet est de la calculer, lorsque c'est possible par la méthode de Monte-Carlo.

**La théorie de Lundberg**

La théorie de Lundberg nous donne une idée du comportement la probabilité de ruine quand $x = R(0)$ est grand. La probabilité de non ruine

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\forall t : R_t > 0 | R(0) = x, x \to \infty]$$

vérifie l'équation integro-différentielle suivante

$$\psi(x) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_0^x \psi(x-z) \widehat{F_Z}(z) dz$$

- $m = \mathbb{E}[Z_k]$,
- $\rho = \frac{c - \lambda m}{\lambda m}$ s'appelle le coefficient de chargement technique
- $F_Z(z)$ est la fonction de repartition de la variable aléatoire $Z = Z_k, \quad \forall k$ (le montant d'un sinistre)
- $\widehat{F_Z}(z) = 1 - F_Z(z)$

Il y a cependant un cas ou $\psi(x)$ se calcule facilement. C'est le cas des sinistres qui suit la loi exponentielle.

$$\psi(x) \leq e^{-\frac{\rho \gamma x}{1+\rho}}$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Lundberg.

**Théorème fondamental de Transformation de Esscher.**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ deux espaces de probabilités.

Soit $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$ un processus de Poisson composé dans $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, $t \in [0, T]$ de l'intensité ( par unité de temps) $\lambda$ et soit $\mathcal{F}_T$ la tribu engendrée par $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$.

La variable aléatoire $\widehat{\mathbb{L}}_T$ est une densité de probabilité sur $\mathcal{F}_T$ qui définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ :

$$d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = \widehat{L}_T \cdot d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}, \qquad \widehat{\mathbb{L}}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}$$

sous laquelle

$$X_t^{\mathbb{Q}} = \sum_{k=1}^{N_t^{\mathbb{Q}}} Z_k^{\mathbb{Q}}$$

est un processus de Poisson composé de caractéristiques suivantes :

- sa intensité est

$$\lambda^{\mathbb{Q}} = \lambda \cdot \mathbb{E}[e^{\theta \cdot Z_1}], \quad \theta \in R_*^+$$

- la fonction de densité de $Z_k^{\mathbb{Q}}$

$$f_Z^{\mathbb{Q}}(y) = f_Z(y) \frac{e^{y\theta}}{\mathbb{E}_P[e^{\theta \cdot Z_1}]}$$

- $\widehat{\mathbb{L}}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}$ est la dérivée Radon Nikodym.
- $\mathbb{L}_T = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}$ est la dérivée Radon Nikodym.
- $\Gamma(\theta) = ln(\mathbb{E}_P[e^{\theta \cdot X_T}])$

Inversement pour passer de $\mathbb{P}$ à $\mathbb{Q}$ on utilise $\mathbb{L}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}$ La valeur optimale de paramètre $\theta$ est la racine de l'équation

$$\Gamma'(\theta) = a.$$

Quand cette équation est satisfaite pour un paramètre $\theta^*$ la variance de l'évènement rare calculée avec ce paramètre est minimale.

### Calcule de la ruine rare.

D'après le modèle de Lundberg

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k = a - X_t, \quad a = x + c \cdot t$$

On cherche la probabilité de la ruine à horizon fini et on passe de l'espace avec la mesure $\mathbb{P}$ dans l'espace avec la mesure $\mathbb{Q}$ :

$$\mathbb{P}[X_T > a] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{X_T > a}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} \mathbb{L}_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}]$$

La probabilité $\mathbb{P}[X_T > a]$ est très petite ( parfois $10^{-30}$ !). Pour pouvoir calculer cette probabilité par Monte Carlo on génère (dans $\mathbb{Q}$!) les sinistres avec l'intensité $\lambda^{\mathbb{Q}}$ beaucoup plus élevée $\lambda$ ce que permet de compter $\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a}$. Cependant pour compenser cette valeur élevée on ajoute un coefficient de passage ( la dérivée Radon Nikodym) $\mathbb{L}_T$ dont la valeur est très petite. On restore donc pour la probabilité recherchée une très petite valeur. Cette méthode de Monte-Carlo s'appelle l'Échantillonnage Préférentiel or "Importance Sampling".

Inversement pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{P}$ on utilise $\widehat{\mathbb{L}}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}$.

$$\mathbb{Q}[X_T > a] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{X_T > a} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{X_T > a} \widehat{\mathbb{L}}_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{X_T > a} e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}]$$

## Travail à faire

### Risque de ruine à l'horizon fini $T$

L'objectif de cette partie est de calculer la probabilité de ruine

$$\mathbb{P}(R_T < 0).$$

pour différentes valeurs des paramètres du modèle $(X; \alpha; \beta; \lambda; c)$ et pour $T = 1$ an.

1. Estimer la probabilité de ruine au bout d'un an pour les deux jeux de paramètres suivants :

$$\{c = 14; \quad \alpha = 3; \quad \lambda = \frac{1}{24}; \quad \beta = 0.04; \quad X = 50\}$$

$$\{c = 14; \quad \alpha = 3; \quad \lambda = \frac{1}{24}; \quad \beta = 0.04; \quad X = 250\}$$

2. Construire le graphe qui affiche l'evolution de la probabilité de ruine en fonction du capital de départ.
3. Construire le graphe qui affiche l'evolution de la probabilité de ruine en fonction du l'horizon $T$.
4. Estimer la distribution de $R_T$ sachant qu'il y a eu ruine à l'instant $T$.

### Risque de ruine à l'horizon infini

Estimer la probabilité de ruine et le temps de ruine pour les mêmes jeux de données.

### Risque de ruine à l'horizon 1 an est un évènement rare.

1. Simuler un évènement rare ($P \sim 10^{-17}$ !) à l'aide de transformation d'Esscher.
2. Estimer la probabilité de ruine au bout d'un an pour les deux jeux de paramètres suivants :

$$\{c = 14; \quad \alpha = 2.5; \quad \lambda = 2; \quad \beta = 0.5; \quad X = 250.\}$$

$$\{c = 1; \quad \alpha = 1; \quad \lambda = 0.5; \quad \beta = 1; \quad X = 250.\}$$

3. Déterminer le capital initial que la compagnie doit avoir pour que sa probabilité de ruine à l'horizon annuel soit inférieure à $10^{-4}$, $\quad 10^{-6}$.
4. Estimer la distribution de $R_T$ sachant qu'il y a eu ruine à l'instant $T$.

### Compagnie diversifiée.

Dans cette section, on suppose que la compagnie étudiée propose des assurances habitations et des assurances automobiles, et qu'une partie des sinistres liés aux risques naturels (Covid-19) $N_t^{RN}$ touchent à la fois le secteur automobile et habitation. On ajoute des sinistres propres aux habitations $N_t^H$ et des sinistres propres aux voitures $N_t^A$ : le nombre de sinistres affectant la branche habitation jusqu'au temps $t$ est donc $N_t^{RN} + N_t^H$ et le nombre des sinistres affectant la branche automobile est $N_t^{RN} + N_t^A$.

1. Estimer le risque de ruine au bout d'un an (on pourra notamment étudier la ruine de chaque branche et les effets de compensation entre branche).
2. Déterminer le capital initial dont doit disposer la compagnie pour que sa probabilité de ruine à horizon 1 an soit inférieure à 10..6. Comment répartir un capital donné entre ses deux branches ?
3. Représenter la distribution de la réserve sachant qu'il y a eu ruine.

**Livrable 1. - Activité 1. Etudes mathématiques.**

Cet activité vise à vous familiariser avec des notions mathématiques de l'assurance et avec des bases de la théorie de la ruine : le modèle de Lundberg-Cramer.

1. On vous propose de montrer théoriquement que le processus de comptage

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{T_k \leq t}, \quad T_k = \sum_{i=1}^{k} \tau_i$$

suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda t$.

Pour cela vous suivez les étapes :

• v.a. $\tau_i$ suit la loi exponentielle

Vous montrez par récurrence que $T_k = \sum_{i=1}^{k} \tau_i$ suit la loi de $Gamma(k, \lambda)$ de fonction de densité

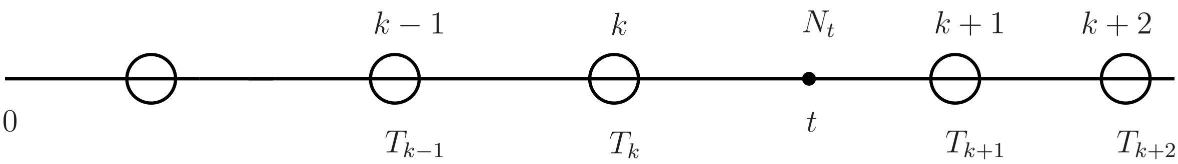
$$f_{T_k}(x) = \frac{\lambda}{(k-1)!}(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{x\geq 0}$$

en utilisant le théorème suivante :

Soit v.a. $\xi_1$ possède une fonction de densité $f_{\xi_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{x\geq 0}$
v.a. $\xi_2$ possède une fonction de densité $f_{\xi_2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{x\geq 0}$ alors
v.a. $Z = \xi_1 + \xi_2$ possède une fonction de densité $f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(x-y)\xi_2(y)dy$

2. Soit $t$ un instant fixe. Montrer que

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$




Justifier d'abord que

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \mathbb{P}[k \leq N_t < k+1] = \mathbb{P}[N_t \geq k] - \mathbb{P}[N_t \geq k+1]$$

Justifier aussi que

$$\mathbb{P}[N_t \geq k] = \mathbb{P}[T_k \leq t]$$

Vous continuez et utilisez l'expression de la fonction de répartition de v.a. $T_k$ et $T_{k+1}$.

3. Calculer l'espérance :

$$\mathbb{E}[X(t)], \quad X(t) = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k.$$

Utilizer l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t} Z_i | N_t = k] \cdot \mathbb{P}[N_t = k]$$

Indication : Lorsqu'on ne possède a priori aucune information sur la situation aléatoire considérée, **la meilleur approximation (au sens $\mathbb{L}^2$) d'une variables aléatoire** $X$ (dans notre cas il s'agit de $X_t$, $t$ est fixe) **est son espérance.**

Par contre, si on observe une v.a. ( dans notre cas il s'agit de $N_t$), ou plus généralement si on a accès à l'information décrite par une tribu $\mathcal{A}$, la **meilleur approximation de** $X$, compte-tenue de cette information est une v.a. $\mathcal{A}$- mesurable, **appelée l'espérance conditionnelle de** $X$ sachant $\mathcal{A}$. Par définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mathbb{E}[1_A X] = \mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]]$$

Dans notre cas $A = \{N_t = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \text{ ...}\}$

On veut calculer $\mathbb{E}[X_t]$ et il est sous-entendu que $A$ se réalise.

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[1_A X_t] = \mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X_t|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[1_{N_t=\{0,1,2,...\}} \mathbb{E}[X_t|N_t = \{0,1,2,...\}]] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t} Z_i | N_t = k] \cdot \mathbb{P}[N_t = k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{k} Z_i] \cdot \mathbb{P}[N_t = k] \qquad (*)$$

4. Calculer une espérance suivante très utile pour la suite :

$$\mathbb{E}[e^{\theta \cdot X(t)}], \quad \theta \in R^+$$

**Livrable 1. - Activité 2. Simulations de Monte-Carlo**

**Simuler par Monte-Carlo en ( Scilab ou Matlab ou Python) :**

1. Processus de comptage $N_t$ par deux façons différentes : à partir de la définition

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{T_k \le t} = \mathbb{I}_{\tau_1 \le t} + \mathbb{I}_{\tau_1+\tau_2 \le t} + \mathbb{I}_{\tau_1+\tau_2+\tau_3 \le t} + \mathbb{I}_{\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4 \le t} + ....$$

pour $t = 1$, $\lambda = 2, \lambda = 5$ et $\lambda = \frac{1}{24}$

Tracer les graphes de fonction de densité de Poisson.

2. Variable aléatoire Gamma$(\alpha, \beta)$ pour les deux cas : $\alpha$ est un nombre entier et $\alpha$ est quelconque.

• Dans le cas $\alpha = n$ simulez n fois une v.a. $Y_i$ qui suivent la loi exponentielle de paramètre $\beta$. La variable aléatoire

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + ... + Y_n$$

suit la loi de Gamma $(n, \beta)$.

• Dans le deuxième cas vous utilisez la méthode de Rejet (voir le cours MCMC).

• Vous tracez les graphes de fonction de densité de Gamma pour les différentes paramètres : Gamma$(1, \frac{1}{2})$,Gamma$(2, \frac{1}{2})$, Gamma$(3, \frac{1}{2})$, Gamma$(5, 1)$, Gamma$(9, 2)$ Gamma$(2.5, \frac{1}{2})$ Gamma$(3.5, \frac{1}{2})$et comparer les graphes avec ceux de Wikipedia.

2. Variable aléatoire Pareto. V. a. Pareto modélise des dommages causés par Covid -19. Choisissez des jeux de données et tracez les fonction de densités.

Déposer sur AREL le rapport avec des démonstrations mathématiques et avec des graphes de fonctions de densité. Attacher les codes.

**Livrable 2. - Activité 1. Simulation Monte-Carlo.**

Dans cette activité

1. Vous simulez l'evolution de la réserve de la compagnie d'assurance $R_t$.

Vous étudiez les effets ses sinistres modélisées par v.a. Gamma (de queue fine) et de par v.a. Pareto (de queue lourde).

2. Vous estimez la probabilité de ruine au bout d'un an (horizon fini) pour les deux jeux de paramètres.

3. Vous estimez la probabilité de ruine et le temps de la ruine (horizon infini) pour des deux jeux de paramètres que vous choisissez vous même.

4. Vous étudiez la méthode de changement de l'espace de probabilité et la transformation d'Esscher.

5. Vous simulez une ruine rare.

6. Finalement vous étudiez le mécanisme de fonctionnement de compagnie diversifiée.

**Livrable 2. - Activité 2. Etudes Mathématiques.**

1. Montrer que dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ sous laquelle

$$X_t^{\mathbb{Q}} = \sum_{k=1}^{N_t^{\mathbb{Q}}} Z_k^{\mathbb{Q}}$$

est un processus de Poisson composé de caractéristiques suivantes :
• sa intensité est

$$\lambda^{\mathbb{Q}} = \lambda \cdot \mathbb{E}[e^{\theta \cdot Z_1}] = \lambda(\frac{\beta}{\beta - \theta})^{\alpha}, \quad \theta \in R_*^+$$

• la fonction de densité de $Z_k^{\mathbb{Q}}$

$$f_G^{\mathbb{Q}}(y) = f_G(y) \cdot \frac{e^{y\theta}}{\mathbb{E}_P[e^{\theta \cdot Z_1}]} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\beta - \theta)^{\alpha} y^{\alpha - 1} e^{-(\beta - \theta)y}$$

c'est à dire la loi de $f_G^{\mathbb{Q}}(y)$ est la loi de Gamma des paramètres $(\alpha, \beta - \theta)$.
• La dérivée Radon Nikodym

$$\widehat{\mathbb{L}}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}$$

est la dérivée Radon Nikodym.
• Le coefficient $\Gamma(\theta)$

$$\Gamma(\theta) = \ln(\mathbb{E}_P[e^{\theta \cdot X_T}]) = \lambda T((\frac{\beta}{\beta - \theta})^{\alpha} - 1)$$

• Le paramètre optimale

$$\theta = \beta - \beta(\frac{\beta(x + cT)}{\alpha \lambda T})^{-\frac{1}{\alpha + 1}}$$

2. Consulter toujours " Travail à faire" de la page 8.

**Présentez le rapport complet du projet, les résultats accompagnés par des graphes en Scilab ou Matlab. Présenter les pseudo-codes. Cette présentation doit être appelée de façon transparente par un programme.**

## Références bibliographiques


1. Cours sur la simulation des variables aléatoires de Poisson, géométrique, processus de Poisson composé, fonction de densité des variables aléatoires, simulation des évènements rares et transformation d'Esscher est en preparation par I.K.

2. $https : //fr.wikipedia.org/wiki/Solvabilit_{II}$

3. Nicole El Karoui et Emmanuel Gobet "Les outils stochastiques des marchés financiers". Les éditions de l'Ecole Polytechnique.

4. Jean-François DELMAS, Cours "Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie".

5. R. G Gallager, MIT OpenCourse Ware 6.262 Discrete Stochastic Processes

https ://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-262-discrete-stochastic-processes-spring-2011/course-notes/

Théorie de la ruine :

6. S. Asmussen and B. Tuffin, "Stochastic simulation" (2007)

Changement de probabilité exponentiel :

7. P. Glasserman, "Monte Carlo methods in financial engineering" (2003)

8. J.A. Bucklew : "Large deviation techniques in decision, simulation, and estimation" (1990)

9. J.H. Blanchet, K. Leder, and P.W. Glynn. "Efficient simulation of light-tailed sums : an old-folk song sung to a faster new tune" : In Monte-Carlo and quasi-Monte-Carlo methods 2008, pages 227 248. Springer, Berlin, 2009.

10. Mikosch : "Non-Life Insurance Mathematics" (Springer 2004)