

PROJET: SIMULATION DU MODÈLE DE LUNDBERG

Ruine en assurance.



Assurance

- Assurance est un contrat de transfert de risques entre deux parties.
- Sociétés d'assurance s'appuient sur un grand nombre d'assurés.
- Chiffre d'affaires de l'assurance en France dépasse les 180 milliards d'euros.
- Evaluation de la solvabilité d'une société d'assurance est une question cruciale et complexe.
- Réforme réglementaire Solvabilité II impose. de mieux mesurer les expositions aux risque.
- **Evaluation des probabilités d'insolvabilité et de ruine.**

Objectifs du Projet

- Etude des bases de la théorie de la ruine: le modèle de Lundberg-Cramer.
- **Simulation par Monte-Carlo du mécanisme de fonctionnement d'une compagnie d'assurance:**
 - Simulation de variables aléatoires: Gamma, Poisson, loi Pareto.
 - Application de la Méthode de Rejet avancée
- **Evaluation par Monte-Carlo de la probabilité d'insolvabilité d'une compagnie**
 - Sinistres de Queue fine
 - Sinistres de Queue lourde
- Distribution de la dette
 - Simulation d'une espérance conditionnelle

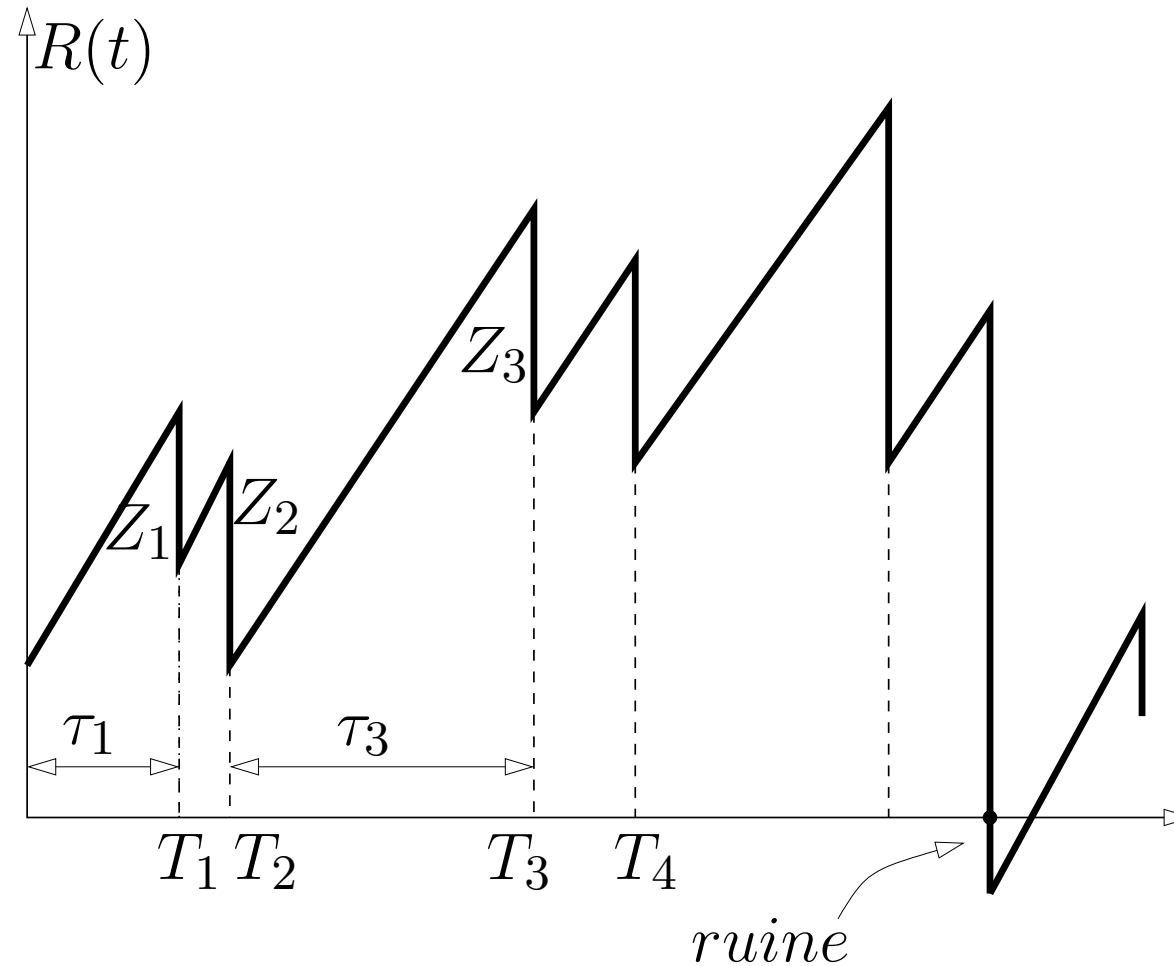
Objectifs du Projet

- Evaluation par MC de la probabilité d'un événement (ruine) rare $P(A) \ll 1$ (*inférieur* 10^{-4}).
 - Mathématique de la transformation de Esscher (Avancement - théorème de Girsanov)
 - Échantillonnage préférentielle (Importance Sampling)
- Etude du mécanisme de fonctionnement de compagnie diversifiée.
- Programmation en Scilab, Matlab ou Python
- Ouverture

Le modèle de Cramer-Lundberg

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

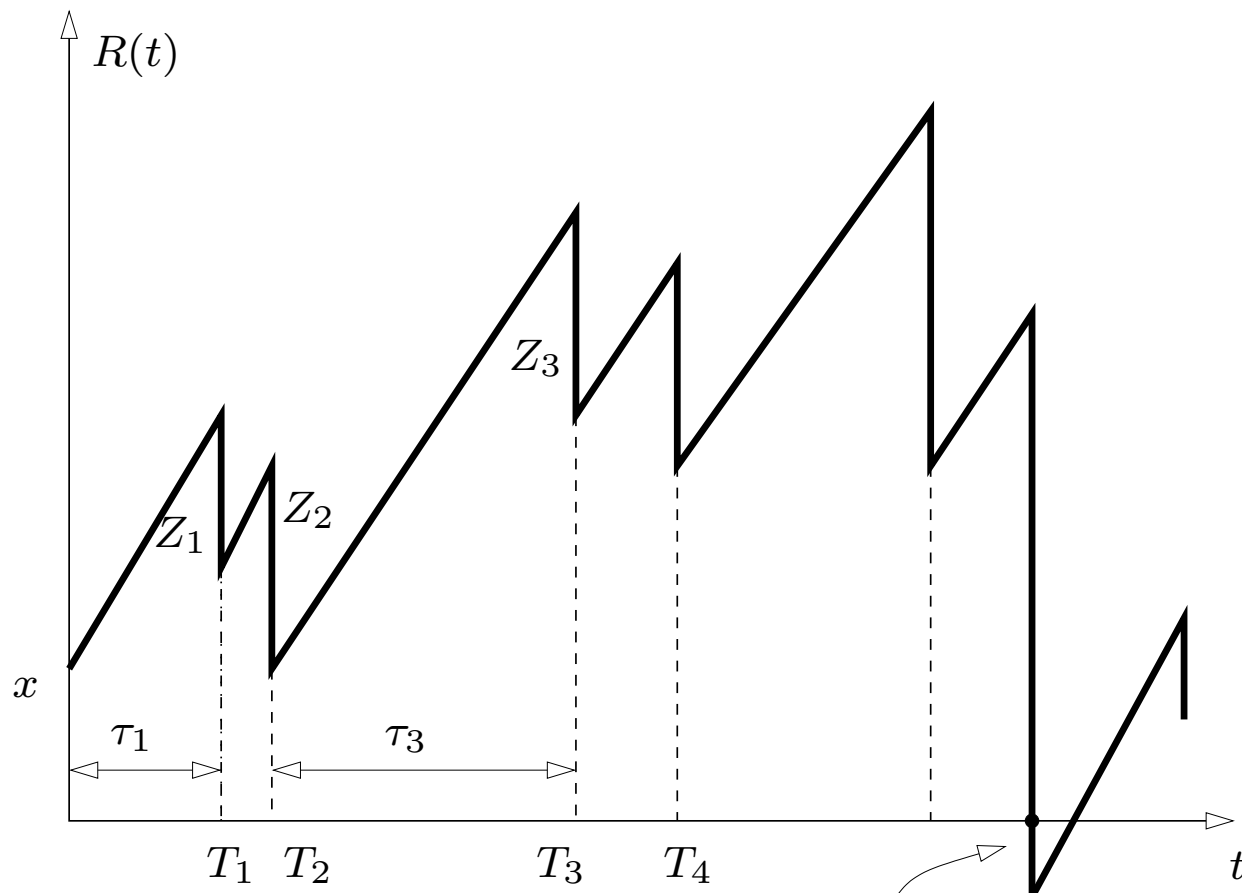
- x - Réserve initiale
- c - Taux instantané de prime
- N_t - Nombre de sinistres pendant la période $[0, t]$
- Z_k - Montant du k -ème sinistre
- T_k - Instants des sinistres



Modèle de Cramer-Lundberg

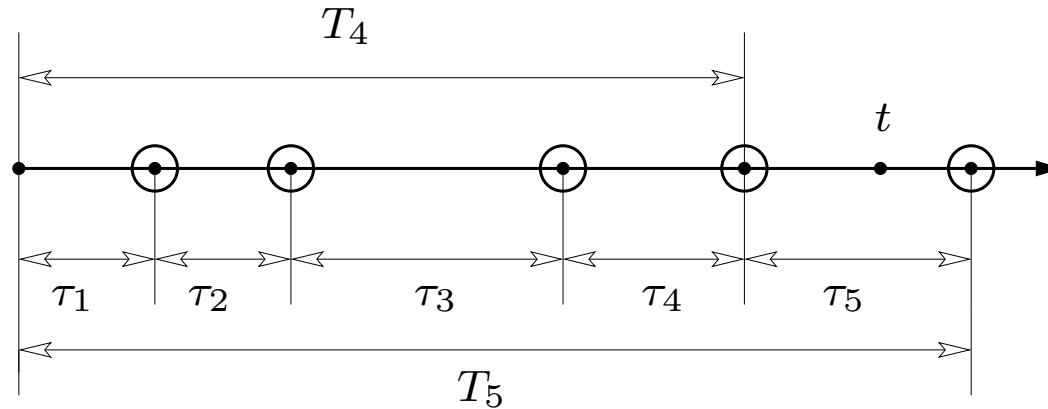
- Simulation de l'évolution de la richesse d'une compagnie par Monte-Carlo:

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$



Processus de comptage

● $N_t = \sum_{k=1} \mathbf{1}_{T_k \leq t}, \quad T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$



● τ_i les durées entre deux sinistres successifs suit la loi exponentielle

● le montant cumulé des sinistres est modélisé par un processus de Poisson composé X_t

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

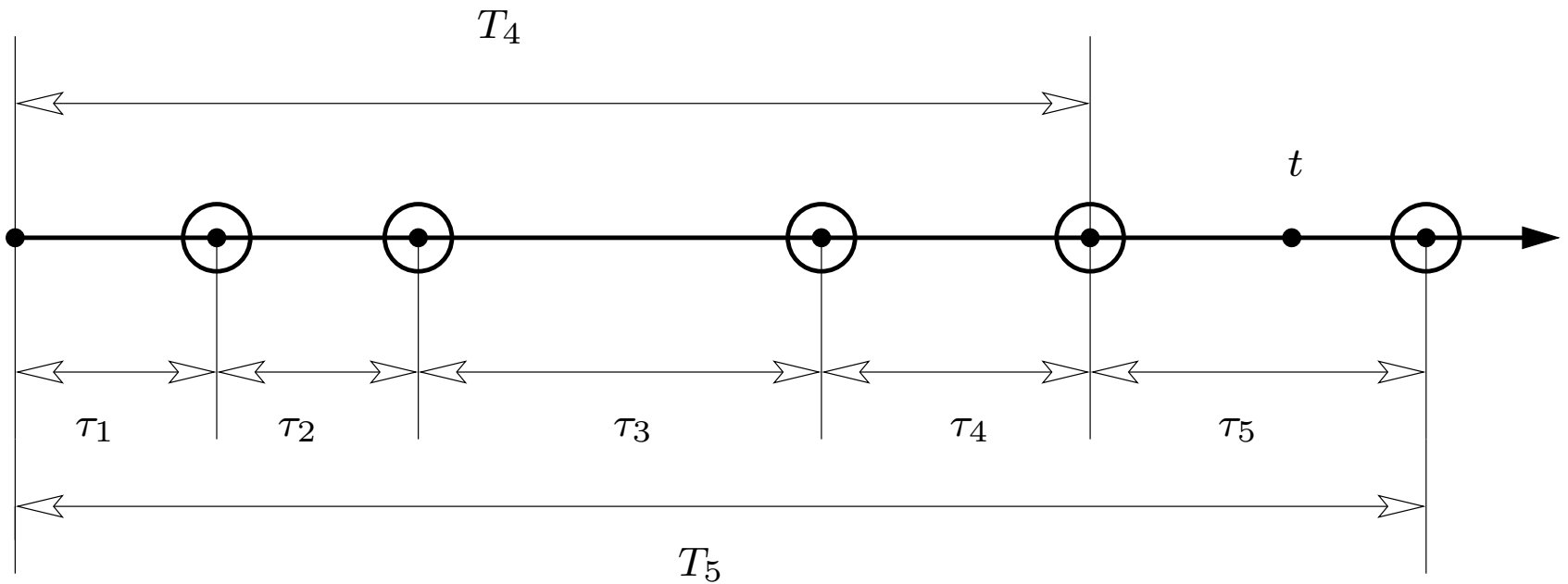
● N_t suit la loi de Poisson:

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Processus de comptage



$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k \leq t}, \quad T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$$



$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{T_k \leq t} = \mathbb{I}_{\tau_1 \leq t} + \mathbb{I}_{\tau_1 + \tau_2 \leq t} + \mathbb{I}_{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \leq t} + \mathbb{I}_{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \leq t} + \mathbb{I}_{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 \leq t} + \dots$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + \dots$$



N_t compte en effet des événements

Le modèle de Cramer-Lundberg

- Simulation de l'évolution par Monte-Carlo:

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

- **Sinistres** : Z_k v.a. strictement positives, indépendantes de même loi Gamma(α, β) arrivant à des dates T_k
 - Simulation de v.a. **Gamma** (α, β):
 - Si $\alpha = n$ est un entier Gamma est une somme des n v.a. exponentielles
 - Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ on utilise la méthode de Rejet.
- L'intervalle entre les dates $T_{k+1} - T_k$ suivent la loi exponentielle
 - Simulation de $N_t = \sum_{k=1} \mathbf{1}_{T_k \leq t}$, $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$

Le modèle de Cramer-Lundberg

- Simulation de l'évolution de la richesse de la compagnie par Monte-Carlo:

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

- Simulation des évènements $\mathbb{E}_P[R(T) < 0]$ par MC classique
- Simulation des évènements $\mathbb{E}_P[R(T) < 0]$ par l'échantillonnage préférentiel

Modélisation des sinistres

- **Lois à queues fines:**

La loi des montants remboursés $(Z_k)_{k \geq 1}$ est à queue fine si il existe $\gamma > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\mathbb{P}[(Z_k) > x] < C e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0$$

Quelques lois de Z_k à queues fines:

- la loi Gamma de paramètres $(\alpha; \beta)$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{I}_{x \geq 0}$$

- la loi Weirbull (α, β) , $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \frac{\alpha}{b^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^\alpha} \mathbb{I}_{x \geq 0}$$

Modélisation des sinistres

- Etudes statistiques ont montré que des événements comme les catastrophes naturelles, tremblements de terres, des épidémies, ou les attaques terroristes, relativement rares mais d'un coût très élevé, ne peuvent être modélisés par des lois à queues fines. La théorie du risque s'est donc développée également pour des lois à queues lourdes.
- Quelques lois de Z_k à queues lourde:
 - la loi Pareto (α, β) , $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec la fonction de densité

$$f_Z(x) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{x \geq \beta}$$

Ruine

- Ruine à l'horizon finie

La société est ruinée à l'horizon T si la réserve R_T est négative:

$$R_T = X + cT - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k < 0$$

Nous sommes intéressés par la probabilité de ruine sur un horizon fini c'est à dire avant un instant donné T , défini par

$$\mathbb{P}[R_T < 0 | R(0) = x]$$

- La probabilité de ruine "éventuelle" (**sur un horizon infini**) est définie par :

$$\mathbb{P}[\exists t : R_t < 0 | R(0) = x]$$

Le temps de ruine est alors

Asymptotique de Lundberg de la Ruine

- Probabilité de non ruine

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\forall t : R_t > 0 | R(0) = x, x \rightarrow \infty]$$

vérifie l'équation integro-différentielle suivante

$$\psi(x) = \frac{\rho}{1 + \rho} + \frac{1}{1 + \rho} \int_0^x \psi(x - z) \widehat{F}_Z(z) dz$$

- $m = \mathbb{E}[Z_k]$,
- $\rho = \frac{c - \lambda m}{\lambda m}$ s'appelle le coefficient de chargement technique
- $F_Z(z)$ est la fonction de repartition de la variable aléatoire $Z = Z_k, \quad \forall k$ (le montant d'un sinistre)
- $\widehat{F}_Z(z) = 1 - F_Z(z)$

Asymptotique de Lundberg de la Ruine

- Inégalité de Lundberg dans le cas des sinistres qui suit la loi exponentielle

$$\psi(x) \leq e^{-\frac{\rho\gamma x}{1+\rho}}$$

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\forall t : R_t > 0 | R(0) = x, x \rightarrow \infty]$$

Simulation aléatoire et des événements rares

- Définition d'un événement A rare : $P(A) \ll 1 (< 10^{-4})$.
- Difficulté intrinsèque : le temps calcul est extrêmement long.

Dans quels domaines applicatifs ? de très nombreux dans le domaine de l'analyse et le contrôle des risques:

- neutronique (contrôle de réacteur nucléaire)
- économie/finance/assurance
- aéronautique et aérospatiale (sûreté, risques de collision et planifications de plan de vol . .)
- dynamique des populations, mutation d'un gene rare, épidémie et contagion
- files d'attente (congestion de trafic. . .)
- fiabilité et maintenance de systèmes
- risques naturels (inondation, tremblement de terre. . .)

Transformation de Esscher

- $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ deux espaces de probabilités. Soit $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$ un processus de Poisson composé dans $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, $t \in [0, T]$ de l'intensité λ et soit \mathcal{F}_T la tribu engendrée par $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$.
- La variable aléatoire $\hat{\mathbb{L}}_T$ est une densité de probabilité sur \mathcal{F}_T qui définit une nouvelle probabilité:

$$d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = \hat{\mathbb{L}}_T \cdot d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}, \quad \hat{\mathbb{L}}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}$$

sous laquelle $X_t^{\mathbb{Q}} = \sum_{k=1}^{N_t^{\mathbb{Q}}} Z_k^{\mathbb{Q}}$ est un processus de Poisson composé de caractéristiques suivantes:

- sa intensité est

$$\lambda^{\mathbb{Q}} = \lambda \cdot \mathbb{E}[e^{\theta \cdot Z_1}], \quad \theta \in R_*^+$$

Transformation de Esscher

- $X_t^{\mathbb{Q}} = \sum_{k=1}^{N_t^{\mathbb{Q}}} Z_k^{\mathbb{Q}}$ est un processus de Poisson composé de caractéristiques suivantes:

- sa intensité est

$$\lambda^{\mathbb{Q}} = \lambda \cdot \mathbb{E}[e^{\theta \cdot Z_1}], \quad \theta \in R_*^+$$

- la fonction de densité de $Z_k^{\mathbb{Q}}$

$$f_Z^{\mathbb{Q}}(y) = f_Z(y) \cdot \frac{e^{y\theta}}{\mathbb{E}_P[e^{\theta \cdot Z_1}]}$$

- $\widehat{\mathbb{L}}_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}$ est la dérivée Radon Nicodym.
- $\mathbb{L}_T = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}$ est la dérivée Radon Nicodym.
- $\Gamma(\theta) = \ln(\mathbb{E}_P[e^{\theta \cdot X_T}])$

Transformation de Esscher

- Inversement pour passer de \mathbb{P} à \mathbb{Q} on utilise

$$\mathbb{L}_T = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}$$

- La valeur optimale de paramètre θ est la racine de l'équation

$$\Gamma'(\theta) = a.$$

Quand cette équation est satisfaite pour un paramètre θ^* la variance de l'évènement rare calculée avec ce paramètre est minimale.

Calcul de la ruine rare.

$$R_t = x + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k = a - X_t, \quad a = x + c \cdot t$$

- la probabilité de la ruine à horizon fini

$$\mathbb{P}[X_T > a] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{I}_{X_T > a}] = \int \mathbb{I}_{X_T > a} d\mathbb{P} = \int \mathbb{I}_{X_T > a} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} d\mathbb{Q} =$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} L_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}]$$

Calcul de la ruine rare.

- $\mathbb{P}[X_T > a] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a} e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}]$
- La probabilité $\mathbb{P}[X_T > a]$ est très petite (parfois 10^{-30} !). Pour pouvoir calculer cette probabilité par Monte Carlo on génère (dans \mathbb{Q} !) les sinistres avec l'intensité beaucoup plus élevée $\lambda^{\mathbb{Q}}$ ce que permet de compter $\mathbb{I}_{X_T^{\mathbb{Q}} > a}$. Cependant pour compenser cette valeur élevée on ajoute un coefficient de passage (la dérivée Radon Nicodym) $\mathbb{L}_T = e^{-\theta X_T^{\mathbb{Q}} + \Gamma(\theta)}$ dont la valeur est très petite. On restore donc pour la probabilité recherchée une très petite valeur.
- Cette méthode de Monte-Carlo s'appelle l'Échantillonnage Préférentiel or "Importance Sampling".

Ouverture

- Proposition des contrats de différents types liés aux différentes branches: assurance vie, complémentaire santé, assurance habitation, assurance automobile, assurance responsabilité civile,...
- **Diversification.**
- L'influence des sinistres sur les taux de cotisation: $c(t)$.
- Correlation entre des sinistres.