1. Transformation d'Esscher

La richesse : $R(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$, $a = x + ct$

On note $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$ le processus de Poisson composé

* N_t suit la loi de Poisson d'intensité λ.

* Z_t suit la loi de Gamma (α, β) avec la fonction de densité $f_G(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta y}$

On cherche la probabilité de la ruine

$$\mathbb{P}[X_t > a] = E_P[\mathbb{1}_{X_t^P > a}]$$

On passe de l'espace P dans l'espace de probabilité Q : $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$

$$E_P[\mathbb{1}_{X_t > a}] = E_Q\left[\mathbb{1}_{X_t^Q > a} \cdot \frac{dP}{dQ}\right]$$

où $\hat{L}_T = \frac{dQ}{dP}$ est la derivée Radon Nikodym

$$L_T = \frac{dP}{dQ}$$

X_t^θ est le processus de Poisson composé dans $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, $t \in [0, T]$

Scanné avec CamScanner

2. Théorème fondamental de Transformation de Esscher.

a) Soit X_t un processus de Poisson composé et soit $\mathcal{F}_T$ la tribu engendrée par $(X_t)_{0\leq t\leq T}$. La variable aléatoire $\hat{L}_T$ est une densité de probabilité sur $\mathcal{F}_T$ qui définit une nouvelle probabilité

$$Q|_{\mathcal{F}_T} = \hat{L}_T \cdot \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}, \quad \hat{L}_T = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}$$

sous laquelle X_t^Q est un processus de Poisson composé de caractéristiques :

* sa intensité $\lambda^Q = \lambda \cdot \mathbb{E}_P[e^{\theta Z_1}]$, $\theta \in \mathbb{R}_*^+$ un paramètre
* la fonction de densité de Z_k^Q

$$f_G^Q = f_G(y) \cdot \frac{e^{y\theta}}{\mathbb{E}_P[e^{\theta Z_1}]}$$

* $\hat{L}_T = e^{\theta X_t - \Gamma(\theta)}$, $L_T = e^{-\theta X_T^Q + \Gamma(\theta)}$

* $\Gamma(\theta) = \ln \mathbb{E}_P[e^{\theta X_T}]$

Il est evidente que par construction $\mathbb{E}[L_T] = 1$
La valeur optimale de paramètre θ est la racine de l'équation : $\Gamma'(\theta) = a$. Quand cette équation est satisfaite la variance de l'evenement rare est minimale $(\sim \Gamma''(\theta))$.

B) Inversement pour passer de P à Q on utilise $L_T = e^{-\theta X_T^Q + \Gamma(\theta)}$

$$\mathbb{P}\Big|_{\mathcal{F}_T} = L_T \cdot Q\Big|_{\mathcal{F}_T}$$

X_t – le processus composé de Poisson d'intensité λ (on simule λ) et de fonction de densite $f_G(y)$

X_t^Q – le processus composé d'intensité λ^Q (on simule $\lambda^Q = \lambda\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha}$) et de fonction de densité $f_G^Q(y)$.

3. Montrer par des calculs directes

après avoir etudié les demonstrations mathematiques generales.
Demonstration 1 est suffisante

* $\lambda^{Q} = \lambda \left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha}$

* $f_{\sigma}^{Q}(y) = \frac{(\beta-\theta)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot y^{\alpha-1} e^{-(\beta-\theta)y}$

c'est-à-dire la loi de $f_{\sigma}^{\theta}(y)$ est la loi de Gamma des paramètres $(\alpha, \beta-\theta)$.

* $\theta = \beta - \beta \left[\frac{\beta(x+p)}{\alpha\lambda T}\right]^{-\frac{1}{\alpha+1}}$

* $\Gamma(\theta) = \lambda T\left[\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha} - 1\right]$

partie Math livrable 2

Indication :

$$\mathbb{E}_p\left[e^{\theta X_T}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\theta \sum_{i=1}^{k} Z_i}\right] \cdot P(N_T = k) =$$

$$= \sum_{k} \mathbb{E}\left[e^{\theta Z_1} \cdot e^{\theta Z_2} \cdots e^{\theta Z_k}\right] \cdot P(N_T = k) = \left\{ Z_k \text{ sont indépendants} \right\}$$

$$= \sum_{k} \left(\mathbb{E}(e^{\theta Z_1})\right)^{k} \cdot e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{k}}{k!} = e^{\lambda T\left(\mathbb{E}[e^{\theta Z_1}] - 1\right)}$$

$$= e^{\lambda T\left[\left(\int e^{\theta y} f_G(y)\,dy\right) - 1\right]} = \left\{ \text{car la fonction } f_G(y) \text{ est normalisée} \right\}$$

$$= e^{\lambda T \int (e^{\theta y} - 1) f_G(y)\,dy}$$

Nous allons etablir les relations entre λ et λ^Q et f_G et f_G^Q.

4. Demonstration 1 Simplifié

On calcule la fonction caracteristique de X_T dans l'espace $\mathbb{P}$ et dans Q et on fait les identifications.

Calculons la fonction caractéristique $\Phi(u) = E_Q\left[e^{iuX_T}\right]$ et trouvons les relations entre λ et λ^Q, f_G et f_G^Q par deux façon différentes :

* $$E_Q\left[e^{iuX_T^Q}\right] = e^{\lambda^Q T\left(E_Q\left[e^{iuZ_1}\right]-1\right)} = \boxed{e^{\lambda^Q T\int\left(e^{iuy}-1\right)f_G^Q(y)\,dy}}$$

* $$E_Q\left[e^{iuX_T^Q}\right] = E_P\left[e^{iuX_T}\underbrace{e^{\theta X_T-\Gamma(\theta)}}_{L_T}\right]$$

$$= E_P\left[e^{(iu+\theta)X_T}\right]\cdot e^{-\lambda T\left(E_P\left[e^{\theta Z_1}\right]-1\right)} =$$

$$= e^{\lambda T\, E_P\left[e^{(iu+\theta)Z_1}-1\right]}\cdot e^{-\lambda T\left(E_P\left[e^{\theta Z_1}\right]-1\right)}$$

$$= e^{\lambda T\left(E_P\left[e^{(iu+\theta)Z_1}\right]-E_P\left[e^{\theta Z_1}\right]\right)} =$$

$$= e^{\lambda T\, E_P\left[e^{(iu+\theta)Z_1}-e^{\theta Z_1}\right]} = e^{\lambda T\, E_P\left[e^{\theta Z_1}\cdot\left(e^{iuZ_1}-1\right)\right]}$$

$$= \boxed{e^{\lambda T\int\left(e^{iuy}-1\right)e^{\theta y}f_G(y)\,dy}}$$

Donc $$f_G^Q(y) = \frac{e^{\theta y}f_G(y)}{\int e^{\theta y}f_G(y)\,dy}$$ — normalisée

$$\lambda^Q = \lambda\cdot\int e^{\theta y}f_G(y)\,dy$$

En effet :

$$\lambda^Q T \int \left(e^{iuy} - 1\right) \boxed{f_G^Q(y)}\, dy =$$

$$= \lambda T \, \frac{\int \left(e^{iuy} - 1\right) e^{\theta y} f_G(y)\, dy}{\int e^{\theta y} f_G(y)\, dy} \cdot \int e^{\theta y} f_G(y)\, dy$$

Pour identifier λ^Q et G $f_G^Q(y)$ j'ai multiplié et divisé par

$$\int e^{\theta y} f_G(y)\, dy$$

Donc

$$\boxed{\lambda^Q = \lambda \int e^{\theta y} f_G(y)\, dy}$$

$$\boxed{f_G^Q(y) = \frac{e^{\theta y} f_G(y)}{\int e^{\theta y} f_G(y)\, dy}}$$

5. Simulations

Vous simulez

$$\mathbb{P}\left[X_T^P > a\right] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_{X_T^Q > a} \cdot e^{-\theta X_T^Q + \Gamma(\theta)}\right]$$

La variable aliatoire X_T^Q suit la loi de Poisson composé

$$X_T^Q = \sum_{i=1}^{N_t^Q} Z_K^Q$$

* N_t^Q suit la loi de Poisson avec l'intensité λ^Q
* Z_K^Q suit la loi de Gamma (des paramètres) : $\alpha^Q = \alpha$, $\beta^Q = \beta - \theta$
* $\Gamma(\theta) = \lambda T\left[\left(\frac{\beta}{\beta-\theta}\right)^{\alpha} - 1\right]$
* θ est la raci. ne de l'équation $\Gamma'(\theta) = a$

d'ou $\theta = \beta - \beta\left[\frac{\beta(x+p)}{\alpha\lambda T}\right]^{-\frac{1}{\alpha+1}}$

6. Demonstration 2. Complète.

On montre que X_t^Q est bien un processus de Poisson composé : ces accroissements sont independants et X_t^Q est stationnaire.

Demonstration est basés sur la fonction caracteristique

$$\Phi(u_1, u_2, \dots u_n).$$

Calculons la fonction caracteristique au point $(u_1, \dots u_n)$

$$\Phi(u_1, \dots, u_n) = E_Q\left[e^{iu_1(X^Q_{t_1} - X^Q_{t_0}) + \dots + iu_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})}\right]$$

$$= E_P\left[e^{iu_1(X_{t_1} - X_{t_0}) + \dots + iu_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})} \cdot \underbrace{e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}}_{L_T}\right]$$

On represente $X_T = \sum_{j=1}^{n}(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})$ et on continue

$$\Phi(u_1, \dots, u_n) = E_P\left[e^{\sum_j [iu_j(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) + \theta(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})] - \Gamma(\theta)}\right]$$

$= \{$ Sous P les accroissements $(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})$ sont indepentants et stationnaires $\}$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n} E_P\left[e^{(iu_j+\theta)X_{\Delta t}}\right]\right) \cdot e^{-\Gamma(\theta)} =$$

On utilise $E_P\left[e^{(iu_j+\theta)X_{\Delta t}}\right] = e^{\lambda\Delta t(E[e^{(iu_j+\theta)Z_1}]-1)}$

$$e^{-\Gamma(\theta)} = e^{-\lambda T(E[e^{\theta Z_1}]-1)} = \left\{T = \sum_{j=1}^{n}\Delta t\right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda\Delta t(E[e^{\theta Z_1}]-1)}$$

On continue

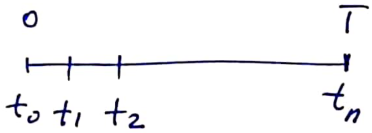
$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda\Delta t(E[e^{(iu_j+\theta)Z_1}]-1) - \lambda\Delta t(E[e^{\theta Z_1}]-1)}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda\Delta t\left[E[e^{(\theta+iu_j)Z_1}] - E[e^{\theta Z_1}]\right]}$$

Montrons que $\lambda^{Q} = \lambda\, E_P[e^{\theta Z_1}]$

$$f_\theta^{Q} = f_\theta(y) \cdot \frac{e^{y\theta}}{E_P[e^{\theta Z_1}]}$$

Soit $t \in [0,T]$



Calculons la loi des accroissement $(X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sous Q pour $t_0 = 0 < \dots < t_n = T$ via sa fonction caracteristique au point $(u_1, \dots, u_n)$

L'idée est montrer que les accroissement de X_t^{Q}

1) sous Q sont independants et stationnairs.

2) Calculer $\Phi(u_1, \dots u_n) = \mathbb{E}_Q\left[e^{iu_1(X_{t_1}^Q - X_{t_0}^Q) + \dots + iu_n(X_{t_n}^Q - X_{t_{n-1}}^Q)}\right]$

puis $\Phi(u_1, \dots u_n) = \mathbb{E}_P\left[e^{iu_1(X_{t_1} - X_{t_0}) + \dots + iu_n(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})} \cdot \hat{L}_T\right]$

et identifier λ^{Q} et f_θ^{Q}.

Demonstration

<u>Calcul preliminaire</u>

$$* \; \hat{L}_T = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)} = e^{\theta X_T - \ln E_P[e^{\theta X_T}]}$$

$$= \frac{e^{\theta X_T}}{E_P[e^{\theta X_T}]} = e^{\theta X_T} \cdot e^{-\lambda T\left(E[e^{\theta Z_1}] - 1\right)} =$$

$$= e^{\theta \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) - \lambda T\left(E[e^{\theta Z_1}] - 1\right)}$$

avec

$$E[e^{\theta Z_1}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} f_\theta(y)\, dy$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda \Delta t \, E[e^{\theta Z_1}(e^{iu_j Z_1}-1)]} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda \Delta t \int e^{\theta y}(e^{iu_j y}-1) f_G(y)dy} \qquad (R)$$

On en déduit que les accroissements de X sous Q sont indépendants et stationnaires.

En effet le résultat (R) montre que

$$E_Q\left[e^{iu_1(X^Q_{t_1}-X^Q_{t_0})+ \dots + iu_n(X^Q_{t_n}-X^Q_{t_{n-1}})}\right] =$$

$$\prod_{j=1}^{n} E_Q\left[e^{iu_j(X^Q_j - X^Q_{j-1})}\right] = \prod_{j=1}^{n} E_Q\left[e^{iu_j X^Q_{\Delta t}}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda^Q \Delta t \int (e^{u_j y}-1) f^Q_G \, dy}$$

donc les processus $\left(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\right)$ se factorise et donc indépendants.

Maintenant il faut identifier

$$\lambda \Delta t \int e^{\theta y}(e^{iu_j y}-1) \cdot f_G(y) dy \text{ et}$$

$$\lambda^Q \Delta t \int (e^{iu_j y}-1) \cdot f^Q_G(y) dy$$

$$\Delta t \underbrace{\lambda \int e^{\theta y} f_G(y)\,dy}_{=\lambda^Q} \underbrace{\frac{\int e^{\theta y}\left(e^{iu_j y}-1\right) f_G(y)\,dy}{\int e^{\theta y} f_G(y)\,dy}}$$

$$= f_G^Q(y)$$

$$= \lambda^Q \Delta t \int \left(e^{iu_j y} - 1\right) \cdot f_G^Q(y)\,dy$$

Par identification

$$\lambda^Q = \lambda \int e^{\theta y} f_G(y)\,dy$$

$$f_G^Q(y)\,dy = \frac{e^{\theta y} f_G(y)\,dy}{\int e^{\theta y} f_G(y)\,dy}$$

On remarque que f_G^Q est bien normalisée.

On a montré que X_T sous Q est un processus de Poisson composé (un processus de Lévy) qui par le théorème de Lévy-Khintchine est caractérisé par l'intensité λ^Q et fonction de densité f_G^Q.