Une probabilite Q sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_Q)$ definit un changement de probabilité (par rapport à $\mathbb{P}$), s'il existe une variable aléatoire $\hat{\mathbb{L}}$, positive, telle que

$$Q(A) = \mathbb{E}[\hat{\mathbb{L}} \cdot \mathbb{1}_A] \quad \text{si } A \in \mathcal{F}_Q$$

La varible aléatoire $\hat{L}$ s'appelle la densité de Q par rapport à $\mathbb{P}$

On note en général

$$Q = \hat{\mathbb{L}} \cdot \mathbb{P} \quad \text{ou} \quad dQ = \hat{\mathbb{L}}\, dP \quad \text{ou}$$

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = \hat{\mathbb{L}}$$

Pour que Q soit une mesure de probabilité il est nécessaire que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\hat{L}] = 1$

. En effet si $A = \Omega \Rightarrow 1 = \mathbb{E}[\hat{L}]$

Très souvent la densité L est représentée sous e^{ℓ}.

Demonstrations detaillés pour le modèle de Lundberg (details pour comprendre le document "Transformation d'Esscher". (Esscher_2. pdf)

$$X_T = \sum_{k=1}^{N_T} Z_k \qquad s \in \mathbb{R}^+$$

$$\boxed{\mathbb{E}_P\left[e^{isX_T}\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\left[e^{is\sum_{i=1}^{N_T} Z_i} / N_T = k\right] \cdot \mathbb{P}(N_T = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\left[e^{is\sum_{i=1}^{k} Z_i}\right] \cdot \mathbb{P}(N_T = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\left[e^{isz_1} \cdot e^{isz_2} \cdots e^{isz_k}\right] \cdot \mathbb{P}(N_T = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{E}_P\left[e^{isz_1}\right]\right)^k \cdot \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda T\, \mathbb{E}_P\left[e^{isz_1}\right]\right)^k \frac{e^{-\lambda T}}{k!} =$$

$$= \boxed{e^{\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{isz_1}\right] - 1\right)}} = e^{\lambda T\left[\left(\int e^{isy} f_G(y)\,dy\right) - 1\right]}$$

$$= e^{\lambda T \int \left(e^{isy} - 1\right) f_G(y)\,dy}$$

$s = u$

- $$\underbrace{\mathbb{E}_Q\left[e^{iuX_T^Q}\right]}_{1} = e^{\lambda^Q T \int \left(e^{iuy} - 1\right) f_G^Q(y)\,dy}$$

on change the paramètres

θ au lieu de is

- $$\mathbb{E}_P\left[e^{\theta X_T}\right] = e^{\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{\theta z_1}\right] - 1\right)}$$

$$\overbrace{\mathbb{E}_Q\left[e^{iuX_T^Q}\right]}^{1} = \overbrace{\mathbb{E}_P\left[e^{iuX_T}\underbrace{e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)}}_{\hat{L}_T = \frac{dQ}{dP}}\right]}^{\text{Esscher transformation} \; 2}$$

Idéé de demonstration

$$\hat{L}_T = \frac{dQ}{dP} = e^{\theta X_T - \Gamma(\theta)} \quad , \quad \Gamma(\theta) = \ln \mathbb{E}_P\left[e^{\theta X_T}\right]$$

$$\hat{L}_T = e^{\theta X_T - \ln \mathbb{E}_P\left[e^{\theta X_T}\right]} = \frac{e^{\theta X_T}}{\mathbb{E}_P\left[e^{\theta X_T}\right]}$$

Il est clair que $\mathbb{E}_P\left[\hat{L}_T\right] = 1$

$$\overbrace{\mathbb{E}_P\left[e^{iuX_T}\, e^{\theta X_T - \ln \mathbb{E}_P\left[e^{\theta X_T}\right]}\right]}^{2} =$$

$$= \mathbb{E}_P\left[e^{(iu+\theta)X_T} \frac{1}{\boxed{\mathbb{E}_P\left[e^{\theta X_T}\right]}}\right] =$$

$$= \boxed{\mathbb{E}_P\left[e^{(iu+\theta)X_T}\right]} \cdot \boxed{e^{-\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{\theta Z_1}\right]-1\right)}}$$

$$= \underbrace{e^{\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{(iu+\theta)Z_1}\right]-1\right)}} \cdot \underbrace{e^{-\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{\theta Z_1}\right]-1\right)}}$$

$$= e^{\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{(iu+\theta)Z_1}\right] - \mathbb{E}_P\left[e^{\theta Z_1}\right]\right)}$$

$$= e^{\lambda T\left(\mathbb{E}_P\left[e^{\theta Z_1}\left(e^{iuZ_1}-1\right)\right]\right)}$$

$$= e^{\lambda T \int \left(e^{iuy}-1\right) e^{\theta y} f_6(y)\, dy}$$

On a obtenu

$$\underbrace{e^{\lambda^Q T \int (e^{iuy}-1) f_G^Q(y)\,dy}}_{1} = \underbrace{e^{\lambda T \int (e^{iuy}-1) e^{\theta y} f_G(y)\,dy}}_{2}$$

Notre but est de montrer

$$\lambda^Q = \lambda \int e^{\theta y} f_G(y)\,dy$$

$$f_G^Q(y)\,dy = \frac{e^{\theta y} f_G(y)\,dy}{\int e^{\theta y} f_G(y)\,dy}$$

$$\lambda^{Q} T \int \left(e^{iuy} - 1\right) f_G^{Q}(y)\, dy =$$

$$= \frac{\lambda T \int \left(e^{iuy} - 1\right) e^{\theta y} f_G(y)\, dy}{\int e^{\theta y} f_G(y)\, dy} \cdot \int e^{\theta y} f_G(y)\, dy$$

Pour identifier λ^{Q} et G $f_G^{Q}(y)$

j'ai multiplié et divisé par

$$\int e^{\theta y} f_G(y)\, dy$$

Donc

$$\boxed{\lambda^{Q} = \lambda \int e^{\theta y} f_G(y)\, dy}$$

$$\boxed{f_G^{Q}(y) = \frac{e^{\theta y} f_G(y)}{\int e^{\theta y} f_G(y)\, dy}}$$