Problème :

Soit X v.a suit la loi de Poisson avec $\lambda = 2$

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

On vous propose à calculer par MC

$$\mathbb{P}[X > a] \quad \text{où} \quad a = 10$$

Solution 1

On simule N_{me} réalisations de X

$$\{X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_{N_{me}}\}$$

On compte celles (n_a) qui $> a$.

On calcule $\mathbb{P} = \dfrac{n_a}{N_{me}}$

Remarque : • N_{me} doit être 10^6 car a est grande.

• $\mathbb{P}[X > a] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X > a}\right]$

Solution 2 Importance Sampling.

Nous avons deux espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_P, \mathbb{P})$ et $(\Omega, \mathcal{F}_Q, Q)$

V.a X habite dans $(\Omega, \mathcal{F}_P, \mathbb{P})$ et suit la loi de Poisson avec l'intensité $\lambda = 2$

Idée est de passer dans $(\Omega, \mathcal{F}_Q, Q)$ et simuler X_Q qui suit la loi de Poisson avec l'intensité $\boxed{\lambda_Q = \lambda e^{\theta}}$ (θ est un paramètre) et faire $\lambda_Q \gg \lambda$.

Dans ce cas on peut facilement compter les evenements $\mathbb{P}_Q(X_Q > a)$.

Cependant pour résoudre le problème originale (on cherche $\mathbb{P}(X > a)$) on doit multiplier le compteur par un petit coefficient.

$$\mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{X>a}\right] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_{X_Q>a} \cdot \boxed{\frac{d\mathbb{P}}{dQ}}\right]$$

$$\mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{X>a}\right] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_{X_Q>a} \cdot \boxed{e^{-\theta X_Q + \Gamma(\theta)}}\right]$$

$\boxed{\lambda_Q = \lambda \cdot e^{\theta}}$, $\Gamma(\theta) = \lambda(e^{\theta} - 1)$

Travail à faire

1. Simuler $N_{me} = 10^6$: $\{X_1, X_2 \dots X_{N_{me}}\}$ réalisations de v.a Poisson avec $\lambda = 2$

Calculer $\mathbb{P}[X>a] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X>a}\right] = \left(\text{grands nombres!}\right)$

$$= \frac{1}{N_{me}} \sum_{n=1}^{N_{me}} \mathbb{1}_{X>a}$$

- Remarquer : si $N_{me} = 10^4$ $\quad \mathbb{P} = 0$

$\Rightarrow$ $N_{me} = 10^4$ est insuffisante pour calculer la petite probabilité.

2. Simuler $N_{me} = 10^2$: $\{X_1^Q, X_2^Q, \dots X_{N_{me}}^Q\}$ réalisation de v.a Poisson avec $\lambda^Q = \lambda \cdot e^{\Theta}$

$\Theta = 1.8$ (On definit Θ plus tard)

Calculer $\mathbb{P}_Q[X_Q > a] = \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_{X^Q > a} \cdot e^{-\Theta X^Q + \Gamma(\Theta)}\right]$

$$= \frac{1}{N_{me}} \sum_{n=1}^{N_{me}} \mathbb{1}_{X_n^Q > a} \cdot e^{-\Theta X_n^Q + \Gamma(\Theta)}$$

les mêmes!

- Remarquer : Il est possible de calculer très petite probabilité dans Q avec N_{me} petit (suffisamment).

Comment choisir Θ ? -3- bis

On choisit le paramètre Θ de façon à minimiser la variance de

v. a $Z = \mathbb{1}_{X_Q \geq a} \, e^{-\Theta X_Q + \Gamma(\Theta)}$

Pour cela calculer la variance de Z

$$\mathrm{Var}\, Z = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2$$

pour chaque $\Theta(n) = 0.8 + 0.016 \cdot (n-1)$, $n = 1:101$

et tracer le graphe

$$\Theta(n) \longrightarrow \mathrm{Var}\left(Z(\Theta(n))\right).$$

Verifier que Θ est la solution de

$$\Gamma'(\Theta) = a$$

3. Verifier que

$$\mathbb{E}_P[X] = \mathbb{E}_Q\left[X_Q \cdot e^{-\Theta X^Q + \Gamma(\Theta)}\right]$$

v.a Poisson avec

$$\lambda_Q = \lambda \cdot e^{\Theta}$$

possible $h(y)$

Dans $(\Omega, \mathcal{F}_p, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}_P[Y] = \int y \, d\mathbb{P} = \int y \underbrace{f_Y(y)\, dy}_{d\mathbb{P}} =$$

$$= \int y \frac{f_Y(y)}{g(y)} \underbrace{g(y)\, dy}_{dQ} =$$

$g(y)$ est la fonction de densité de Y dans Q

$g(y) \neq 0$ si $f_Y(y) \neq 0$

$$= \mathbb{E}_Q\left[Y_Q \frac{f_Y(Y_Q)}{g(Y_Q)} \right]$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{dQ} = L$$

on simule Y dans Q

c'est à dire avec les paramètres $\boxed{\lambda^Q}$

$Y_Q = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Comment choisir g et par conséquent $\frac{d\mathbb{P}}{dQ}$

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{d\mathbb{P}}{dQ}\right] = 1 \quad \text{ou} \quad \mathbb{E}_P\left[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right] = 1$$

$$\boxed{\frac{d\mathbb{P}}{dQ} = e^{-\theta Y^Q + \Gamma(\theta)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}_P[Y] = \mathbb{E}_Q\left[Y_Q \cdot \dfrac{dP}{dQ}\right] \\ \text{Il faut que } \mathbb{E}_Q\left[\dfrac{dP}{dQ}\right] = 1 \end{array}}$$

On choisit $\dfrac{dP}{dQ} = e^{-\theta \cdot Y^Q + \Gamma(\theta)}$

où $\Gamma(\theta) = -\ln \mathbb{E}_Q\left[e^{-\theta Y^Q}\right]$

En effet $\mathbb{E}\left[\dfrac{dP}{dQ}\right] = \mathbb{E}_Q\left[\dfrac{e^{-\theta Y^Q}}{\mathbb{E}_Q\left[e^{-\theta Y^Q}\right]}\right] = 1$

Calculons $\Gamma(\theta)$

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{-\theta Y^Q}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta k} \frac{(\lambda^Q)^k}{k!} e^{-\lambda^Q} = \sum \frac{(\lambda^Q \cdot e^{-\theta})^k}{k!} e^{-\lambda^Q}$$

$$= e^{\lambda^Q \cdot e^{-\theta}} \cdot e^{-\lambda^Q} = e^{\lambda^Q (e^{-\theta} - 1)}$$

Donc

$$\Gamma(\theta) = -\ln\left(e^{\lambda^Q (e^{-\theta} - 1)}\right) = \lambda^Q \left(1 - e^{-\theta}\right)$$

Nous connaissons $\lambda^Q = \lambda \cdot e^{\theta}$

$$\Rightarrow \Gamma(\theta) = \lambda e^{\theta}\left(1 - e^{-\theta}\right) = \lambda\left(e^{\theta} - 1\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_Q[Y_Q] = \mathbb{E}_P\left[Y_P \cdot \dfrac{dQ}{dP}\right] \\ \text{Il faut que } \mathbb{E}_P\left[\dfrac{dQ}{dP}\right] = 1 \end{array}}$$

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\theta Y_P - \Gamma(\theta)}$$

$$\Gamma(\theta) = \ln \mathbb{E}_P\left[e^{\theta Y_P}\right]$$

Il facile de motrer que

$$\mathbb{E}_P\left[e^{\theta Y_P}\right] = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\theta) = \lambda(e^{\theta}-1)$$