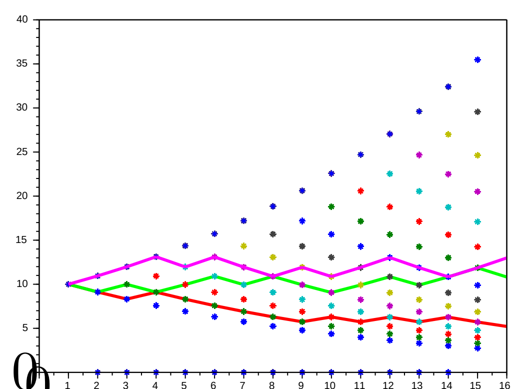
PROJET: CHAÎNES DE MARKOV EN FINANCE.

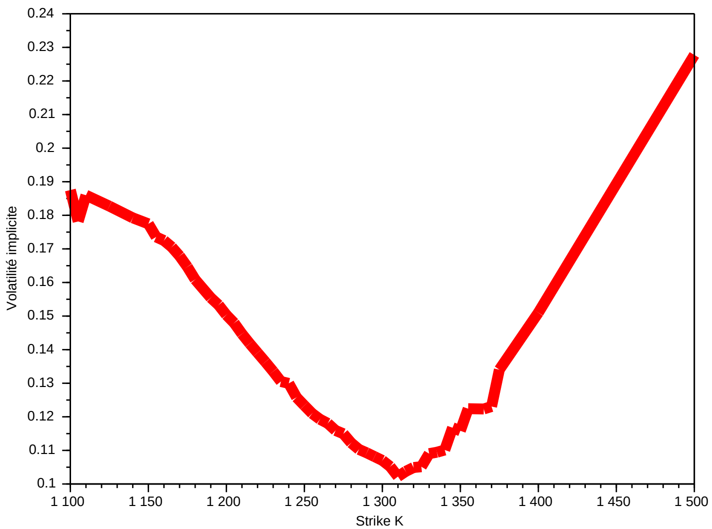
Méthodes stochastiques et déterministes de pricing.

Irina Kortchemski, EISTI



Objectifs du Projet

- Creation de pricing des Options exotiques via interface
- Application de la théorie de probabilité à la modélisation du marché
  - Belles mathématiques à découvrir!
  - Avec Smile de Volatilité



Pricing via interface

Objectifs du Projet

- PARTIE I Méthode de Monte-Carlo par Chaînes de Markov
  - Construction des Chaînes de Markov sur les arbres
  - Simulation des variables aléatoires discrètes
- Calibration des Arbres
  - Arbres Binomial et Trinomial
- Prix des Options par Monte-Carlo
  - Européenne, "Butterfly", "Condor"
- PARTIE II Méthode déterministe de pricing
- Programmation dynamique et prix des Options
  - Options Américaine, Barrières "Knock-in, "Knock-out", "Up and Down"
  - Grecques

Objectifs du Projet

- Prix des Obligations: Bond zero-coupon
- PARTIE III   Interface de pricing des Options
- Programmation en Matlab, Scilab ou Python

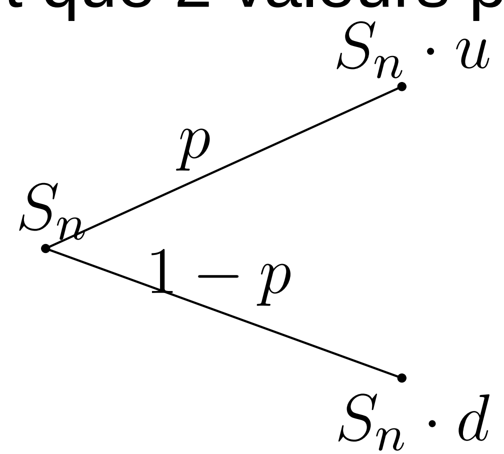
Chaîne sur l'arbre Binomial

- Evolution de l'actif sous-jacent est une Chaîne de Markov discrete.
- L'intervalle $[0, T]$ est discrétisé: $t_n = \Delta t \cdot n$. A chaque instant t_n on fait correspondre le prix S_n discret:

$$t_n \to S_n, \qquad t_0 \to S_0$$

- Valeur de l'actif S_{n+1} n'admet que 2 valeurs possibles

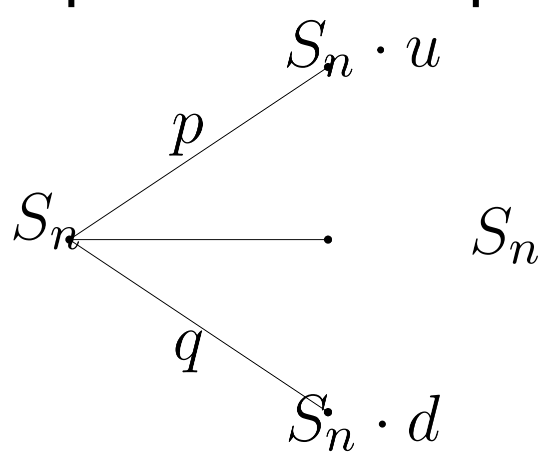
$$S_{n+1} = \begin{cases} u \cdot S_n \\ d \cdot S_n \end{cases}$$



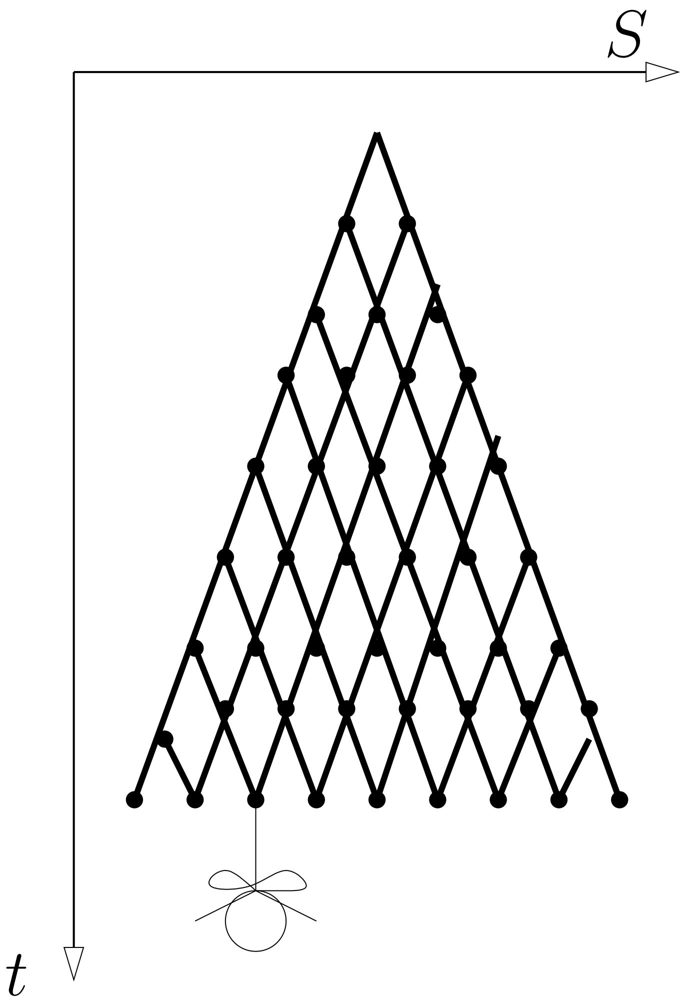
Chaîne sur l'arbre trinomial

- Evolution de l'actif sous-jacent est une Chaine de Markov discrete.
  L'intervalle $[0, T]$ est discrétisé: $t_n = \Delta t \cdot n$. A chaque instant t_n on fait correspondre le prix S_n discret:
- $$t_n \to S_n, \qquad t_0 \to S_0$$
- Valeur de l'actif S_{n+1} n'admet que 3 valeurs possibles:

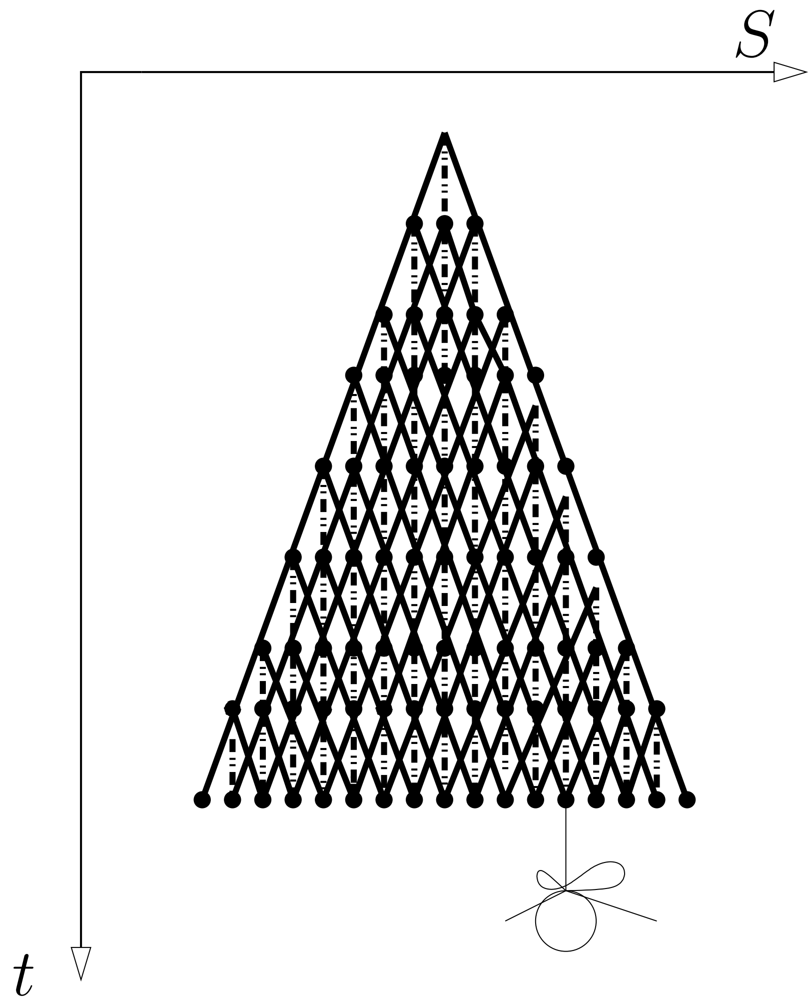
$$S_{n+1} = \begin{cases} u \cdot S_n \\ S_n \\ d \cdot S_n \end{cases}$$



Arbres: Binomial et Trinomial.



Arbre Binomial

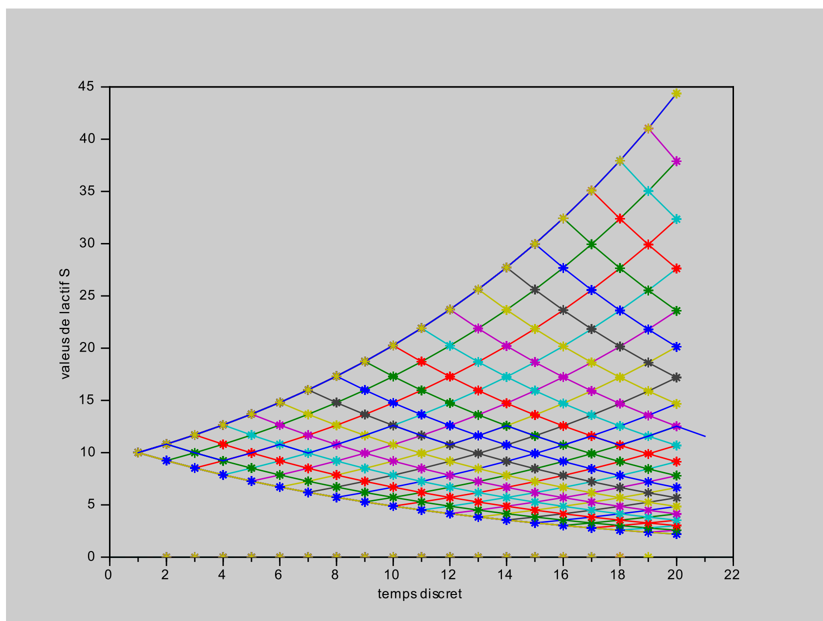


Arbre Trinomial

Calibration de l’arbre binomial.

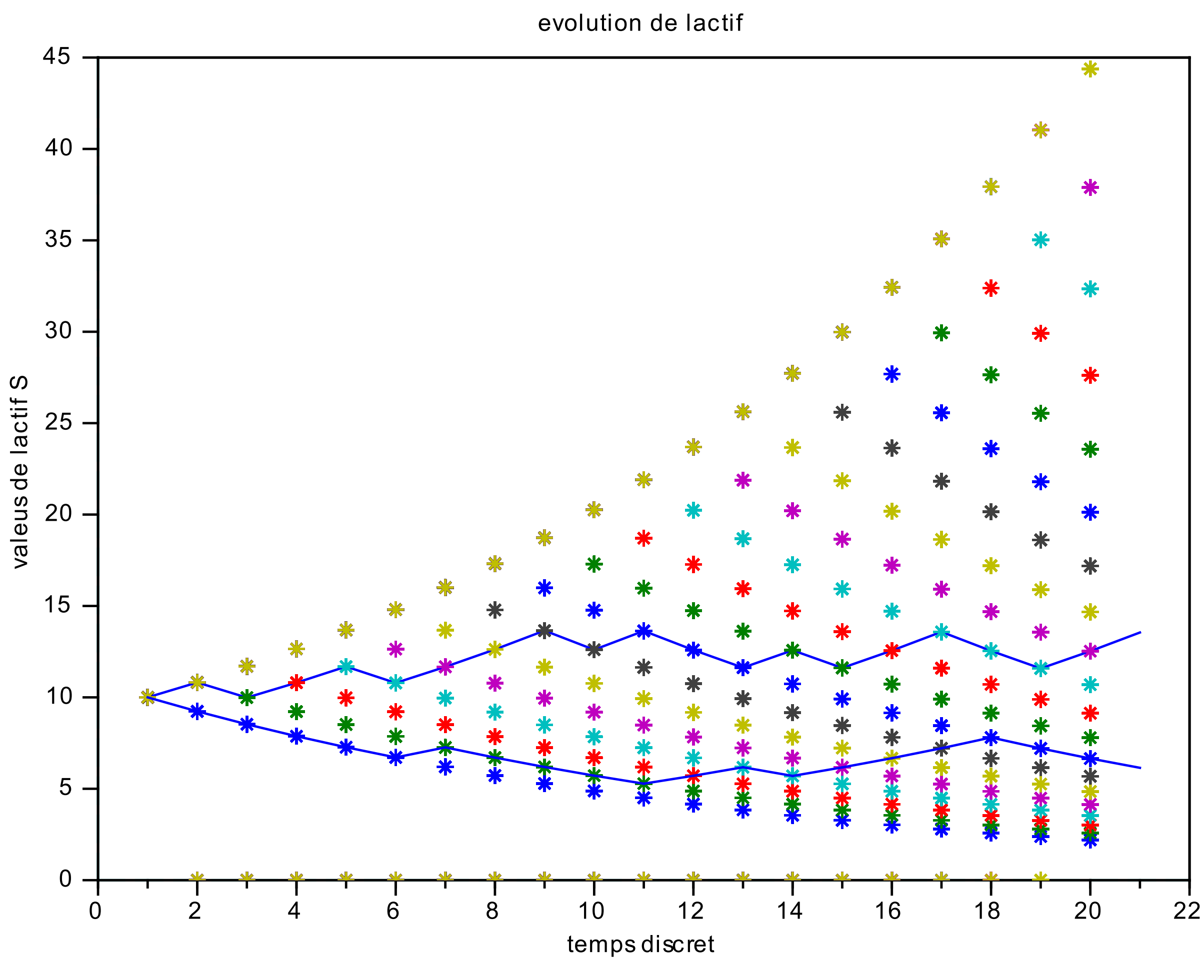
L’arbre Jarrow-Rudd.

- Comment fixer les paramètres: la taille des sauts u et d et la probabilité p ? Dans la limite $\Delta t \to 0$ les modèles discrets des Chaînes de Markov approchent le modèle continu de Black et Scholes.



Chaînes de Markov d'un actif sur l'arbre.

- Simulation des Chaînes suite à la calibration de l'arbre



Option.

- Equation de Black et Scholes

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t=T,S) = max(S-K,0) \end{cases}$$

  - $V(S,t)$ est le prix d'un contrat avec une banque pour pouvoir acheter au prix K une action à la date T.
  - S est le prix d'une action
  - r est le taux d'intêret
  - σ est une volatilité
  - K est le prix d'exércice
  - T est le temps d'exércice

- Vous achetez au prix K une action qui vaut S à la date $t = T$

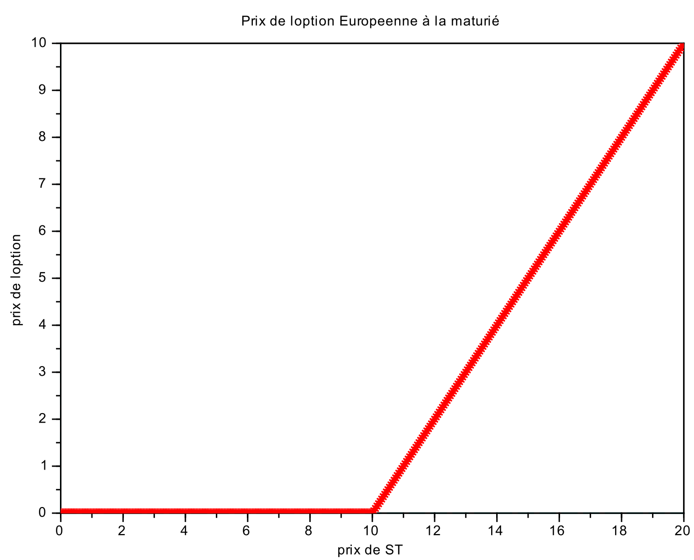
  Si $S > K$ vous gagnez $S - K$

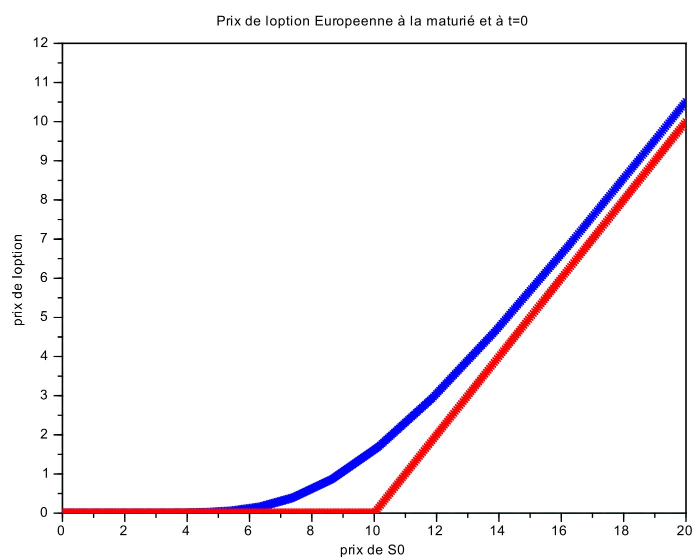
  Si $S < K$ vous n'exercez pas le contrat.

Théorème fondamental de pricing

- A la maturité $t_N = T$ le prix de l'option est défini par la fonction pay-off: $V(T, S_N) = f_{pay-off}(S_N)$.
- Nous cherchons $V(0, S_0)$ le prix de l'option à $t = 0$. Ce prix est représenté par l'espérance conditionnelle:

$$V(0, S_0) = e^{-rT} E[f_{pay-off}(S_N)/S_0]$$



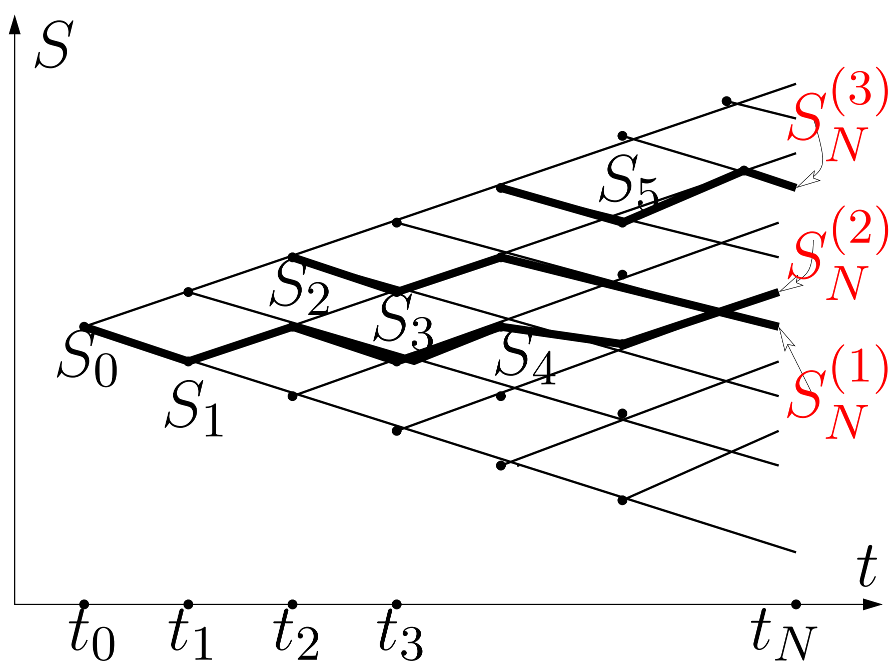


Valorisation de l'option par Monte-Carlo

- Le prix $V(0, S_0)$ le prix de l'option à $t = 0$.
  est représenté par l'espérance conditionnelle:

$$V(0, S_0) = e^{-rT} E[f_{pay-off}(S_N)/S_0]$$

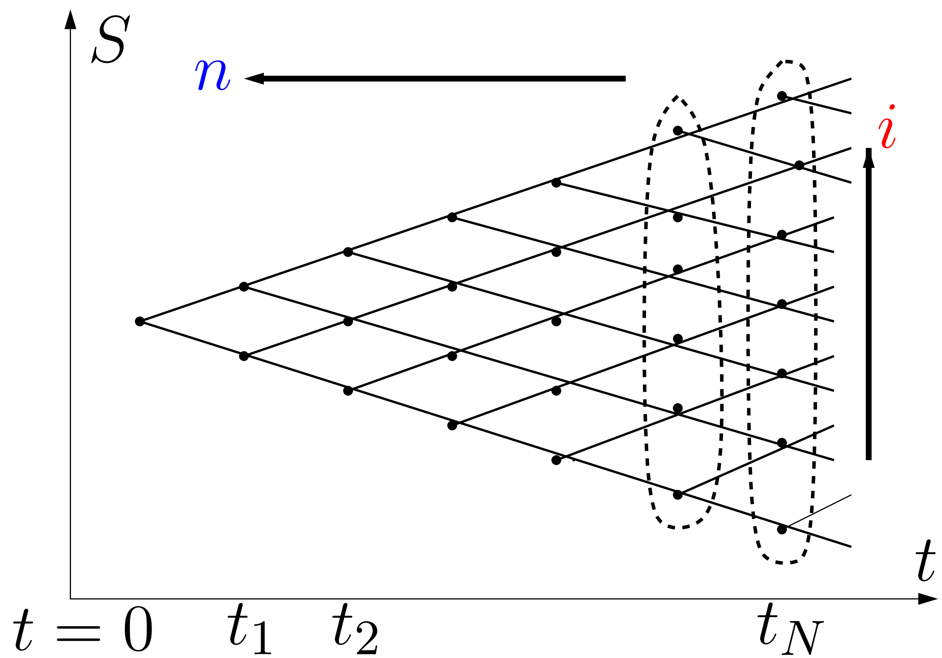
- Prix par Monte-Carlo



$$V(0, S_0) = \frac{e^{-rT}}{N_{mc}} \sum_{k=1}^{N_{mc}} f_{pay-off}(S_N^{(k)})$$

Méthode déterministe de pricing.

- Option est un produit dérivé de l'actif: $V(t, S)$
- t est discret: $t \to t_n$, l'actif S_t est discret: $t \to S(n, i)$



- Option $V(t_n, S(n, i))$ est une MATRICE

$$V(t(n), S(n, i)) \equiv V(n, i)$$

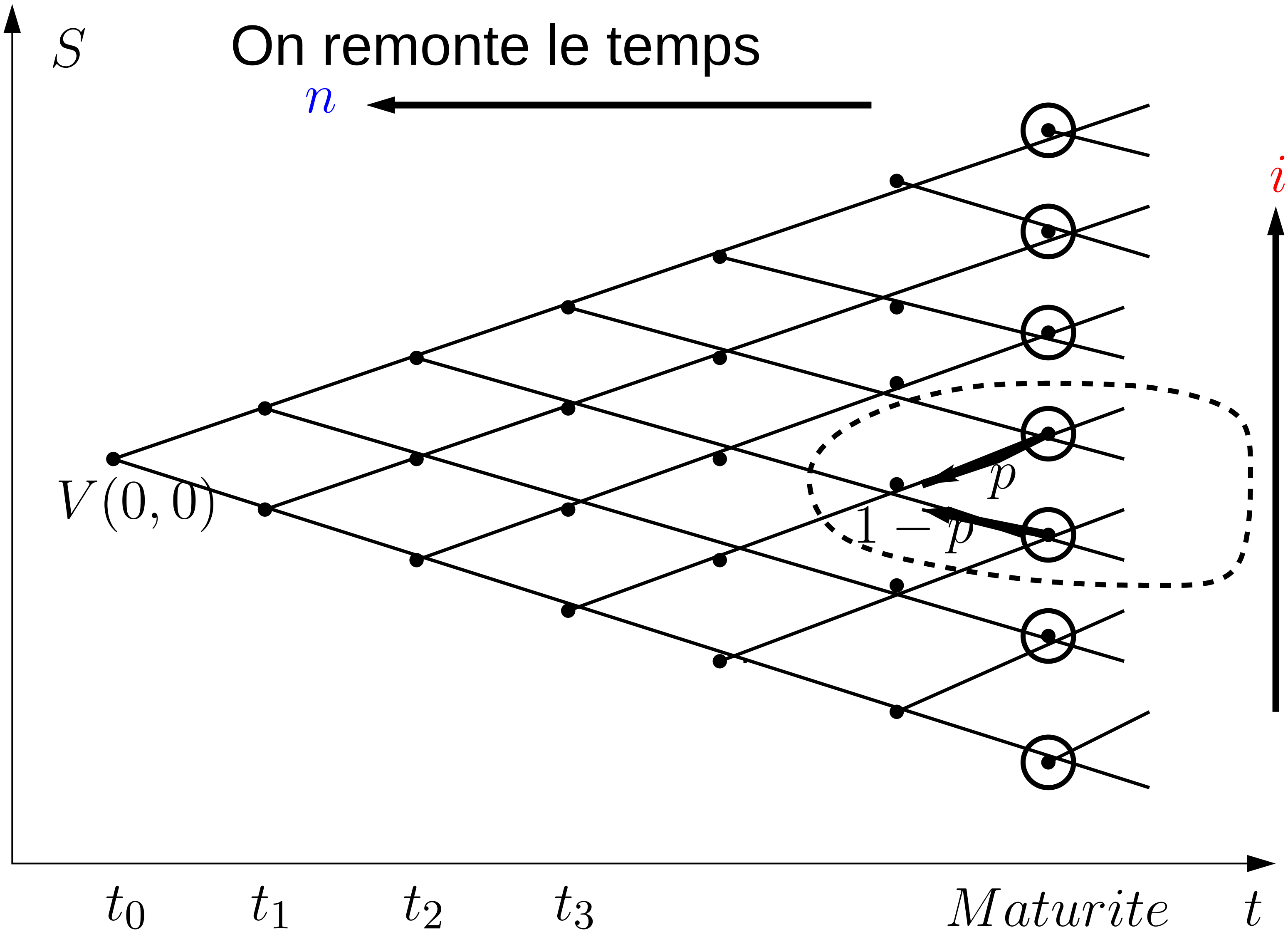
Programmation dynamique

- Définition des prix de l'actif et des prix de l'option à la maturité T.
- Application de l'équation dynamique

$$V(n,i) = e^{-r\Delta t}(pV(n+1, i+1) + (1-p)V(n+1, i))$$

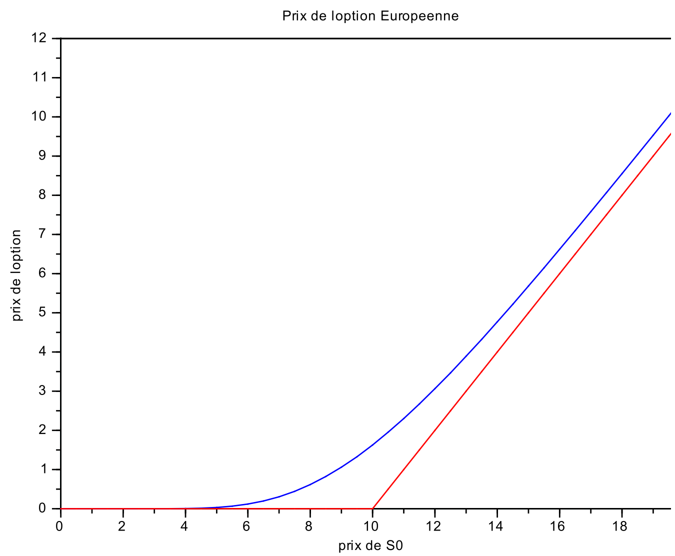
- Programmation en remontant le temps:
- Deux boucles par rapport à temps ("n") et par rapport à l'actif ("i").
- Equivalence entre l'équation dynamique et the théorème fondamental de valorisation de l'option.

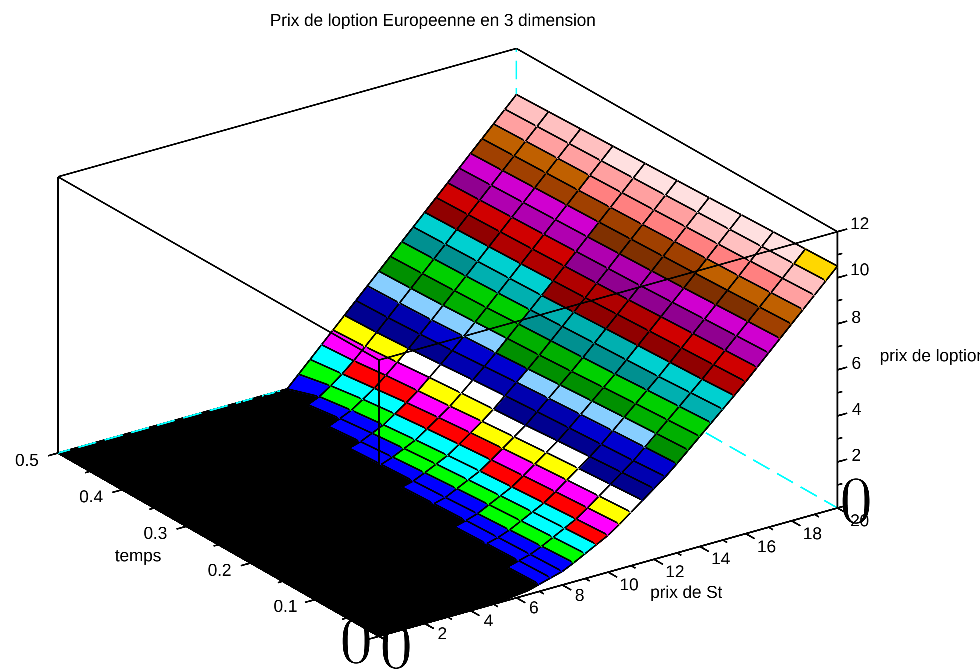
Programmation



Résultats

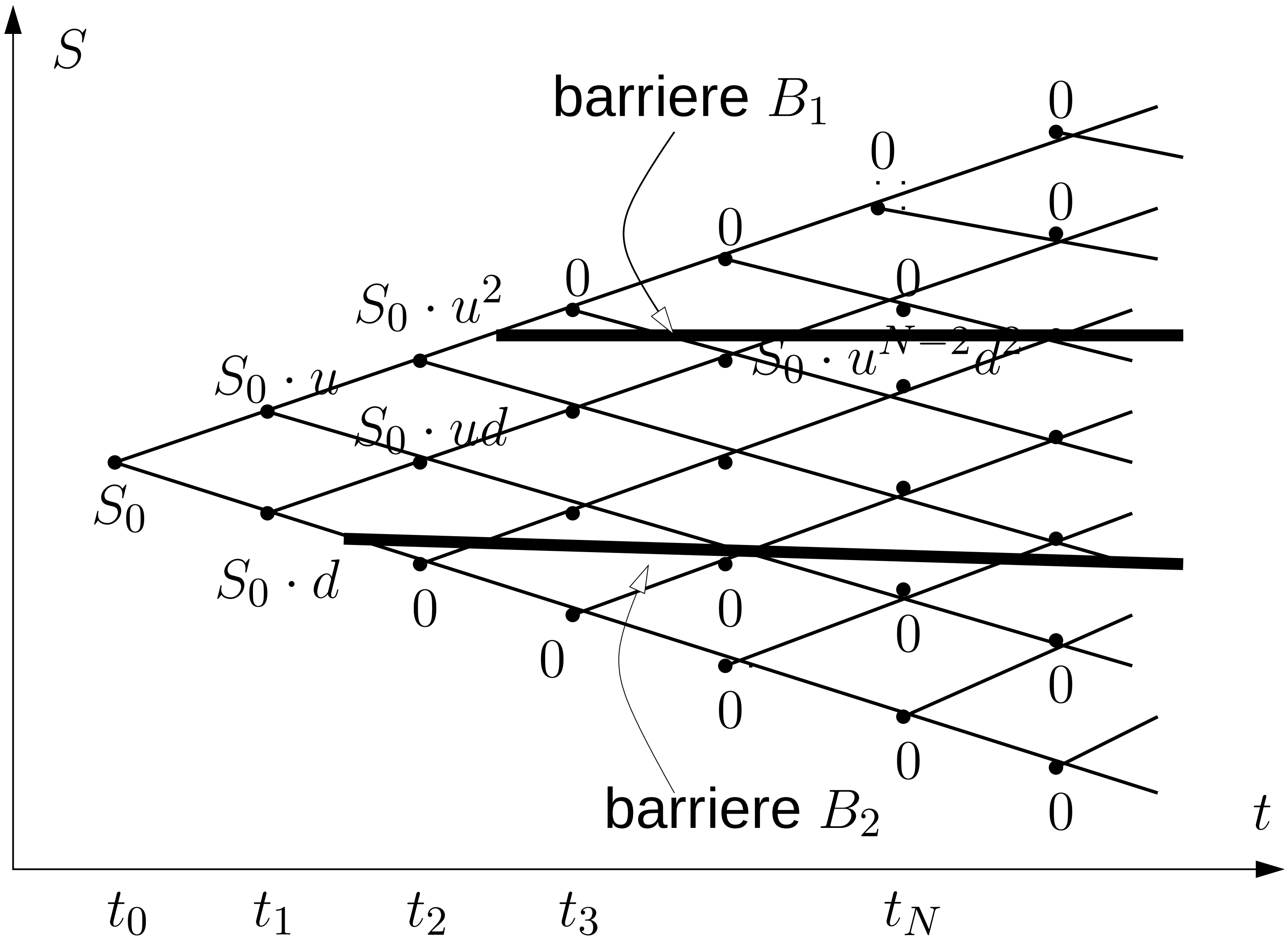
- Call Europénne en 2 et 3 dimensions





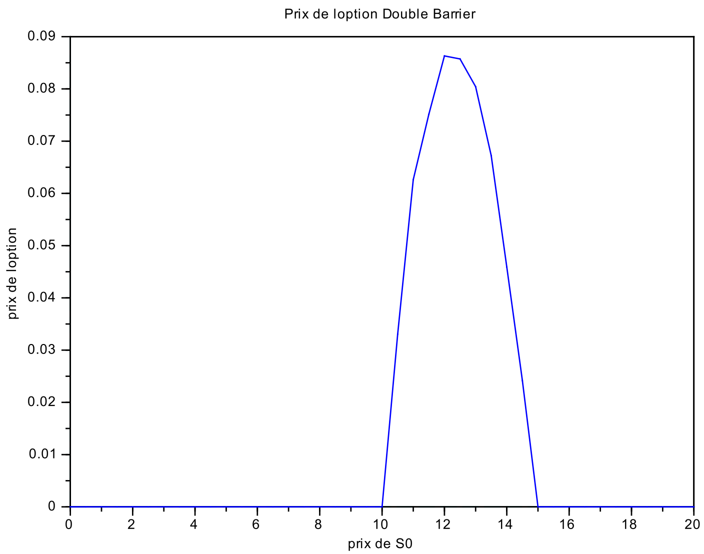
Option Barrière.

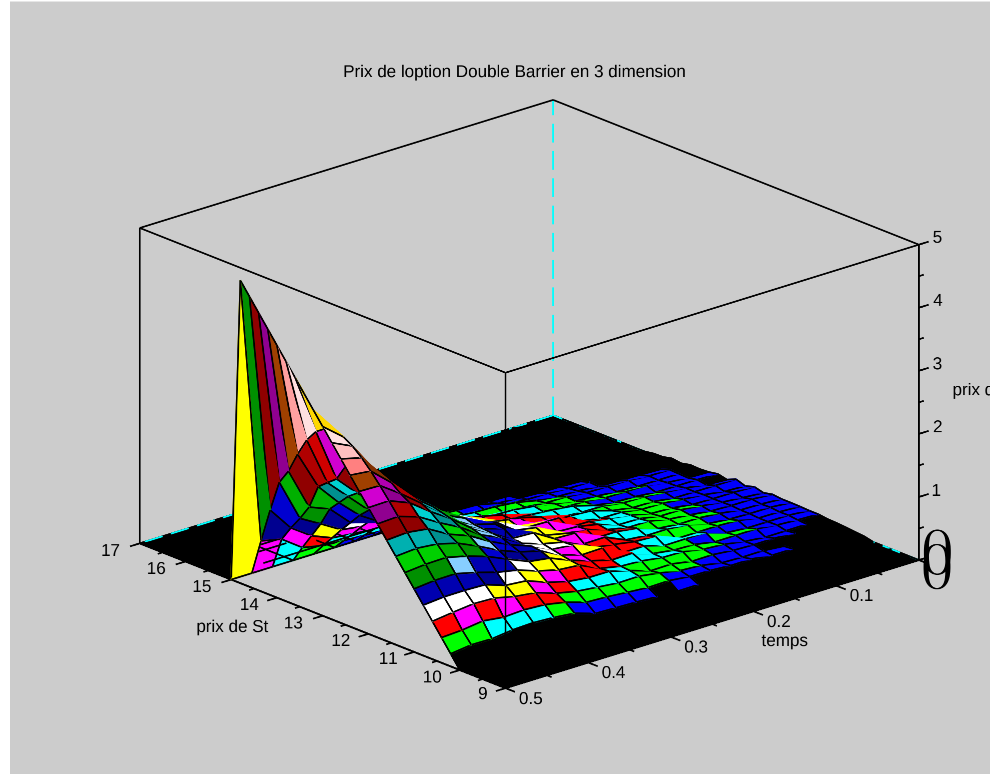
- Double Barrière



Résultats. Option Barrière.

- Double Barrière en 2 et 3 dimensions





Livrables

- Livrable 1
  - Partie mathématique: Calibration des Arbres
  - Pricing via Chaînes de Markov
- Livrable 2
  - Pricing des Options Barrières via programmation dynamique
  - Grecques
  - Interface
- Travail à faire est précisé dans la description détaillé du projet.

Ouverture

- Arbres Implicites
- Arbres Quadrinominaux.
- Pricing des options avec le coût de transaction.
- Couverture ("Hedging") des portefeuilles
- Future and Forward Contracts on Bonds
- Pricing a Caplet
- The Black-Derman-Toy Model
- Pricing de Swaption in a BDT Model
- Pricing des obligations convertibles.

References

- The mathematics of Financial Derivatives. Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne. Cambridge University Press
- On Quantitative Finance. Volume 1. Paul Wilmott. Wiley.
- An introduction to Financial Option Valuation. Desmond J. Higham, Cambridge