

ECOLE INTERNATIONALE DES SCIENCES DE TRAITEMENT DE L'INFORMATION

ING2 Spécialisation "**Génie Mathématique**"

Equations aux dérivées partielles

Notes de cours.

Partie I. Analyse classique.

Anya Désilles

Année scolaire 2009/2010

Table des matières

1	Eléments de théorie de Sturm-Liouville	7
1	Définitions	7
2	Equation de Laplace avec des conditions aux bords homogènes	8
3	Propriétés de l'ensemble de solutions d'un problème de Sturm-Liouville	10
2	Introduction aux EDPs	13
1	Définitions et notations	13
2	Conditions aux bords	14
3	Classification	14
3.1	Formes canoniques des EDP à deux variables	15
3.2	Formes canoniques des EDP à plusieurs variables	21
4	Techniques fondamentales de résolution des EDP	26
4.1	Séparation des variables	26
3	Problèmes paraboliques aux limites en dimension spatiale 1.	29
1	Introduction aux équations paraboliques. Propagation de chaleur	29
2	Position du problème	30
2.1	Cas de conditions aux limites homogènes	31
2.2	Cas de conditions aux limites non homogènes	32
3	Résolution du problème homogène	33
3.1	Exemple travaillé	34
4	Solution du problème non homogène	35
5	Retour au principe de superposition.	37
6	Conditions aux limites de Neumann ou mixtes	37
6.1	Méthode générale de résolution d'un problème aux limites.	38
6.2	Exemples travaillés	39
7	Principe de maximum. Unicité des solutions.	42
8	Fonction de Green	43
8.1	Cas de problème homogène.	43
8.2	Cas de problème non homogène.	44
8.3	Propriétés de la fonction de Green	45
8.4	Problème aux limites homogènes	46
8.5	Problème aux conditions initiales et aux limites	46

4	Problèmes paraboliques sur un axe ou un demi-axe infini. Dimension spatiale	47
1	Position de problème	47
2	Résolution de problème homogène : méthode de transformée de Fourier	48
3	Solution fondamentale	49
4	Résolution de problème non homogène	52
5	Unicité de solutions du problème de Cauchy.	53
6	Problèmes de Cauchy sur un demi-axe	53
5	Equations hyperboliques	55
1	Exemple de modélisation : vibration d'une corde	55
2	Problèmes aux limites	57
3	Problème de Cauchy pour l'équation d'onde sur l'axe réel.	59
3.1	Interprétation physique de la formule de D'Alembert	61
4	Vibrations d'une corde fixée aux extrémités. Solution par la méthode de Fourier.	63
6	Equations elliptiques	67
1	Exemple de modélisation : état stationnaire dans le problème de propagation de chaleur	67
2	Formules de Green et les fonctions harmoniques	68
2.1	Formule de Gauss-Ostrogradsky	68
2.2	Formules de Green	68
2.3	Fonctions harmoniques	70
3	Les problèmes aux bords associés à l'équation de Poisson	72
4	Solution de problème de Dirichlet par la méthode de fonction de Green	73
4.1	Motivation et définitions	73
A	Rappels sur les équations différentielles ordinaires	77
1	Généralités	77
1.1	Définitions et notations	77
1.2	Existence et unicité de solution de problème de Cauchy	80
2	Equations d'ordre 1	81
2.1	Equations à variables séparées (ou séparables)	81
2.2	Equations linéaires	82
3	Equations d'ordre 2	83
3.1	Plan de résolution.	83
3.2	Solution d'une équation homogène	83
3.3	Solution particulière d'une équation non homogène selon le type du second membre	84
B	Rappels sur les séries de Fourier	91
1	La famille de fonctions trigonométriques	91
2	La série de Fourier d'une fonction	92
3	Convergence de séries de Fourier	93
	Index	95

Bibliographie

- [1] A.A. Samarski A.N. Tychonov. *Partial differentiel equations of mathematical physics. Volume I.* Holden-day, Inc, 1964.
- [2] J. Kevorkian. *Partial differentiel equations. Analytical solution technics.* Springer, 2000.
- [3] I.G. Petrovsky. *lectures on Partial Differentiel Equations.* Dover Publications, Inc, 1991.
- [4] Mark A. Pinsky. *Introductions to partial differentiel equations with applications.* McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [5] Jhon W. Lee R.B. Guenther. *Partial differentiel equations of mathematical physics and Integral equations.* Dover Publications, Inc, 1995.

Chapitre 1

Eléments de théorie de Sturm-Liouville

1 Définitions

En appliquant la méthode de séparation des variables pour la résolution des équations en dérivées partielles on est souvent amenés, comme dans l'exemple ci-dessus, à résoudre des équations différentielles ordinaires d'ordre 2 avec un paramètre scalaire. On s'intéresse alors à toutes les valeurs possibles du paramètre pour lesquelles des solutions existent et, bien sûr, aux solutions elles mêmes.

La théorie de Sturm-Liouville s'intéresse exactement à cette question. Nous en donnons ici quelques éléments et surtout nous étudions quelques cas particuliers, qui nous seront utiles par la suite.

Définition 1.1 (Equation de Sturm - Liouville). On appelle équation de Sturm-Liouville une équation linéaire d'ordre 2 suivante :

$$(p(x)y'(x))' + (\lambda\rho(x) - r(x))y(x) = 0$$

où $p(x)$, $\rho(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions données, continues sur un intervalle donné $[a, b]$. λ est un paramètre inconnu. La fonction ρ s'appelle fonction de pondération.

Exemple 1.1. L'équation $y'' + \lambda y = 0$ que nous avons rencontrée dans l'exemple 2.7 est une équation de Sturm-Liouville avec $p(x) = 1$, $\rho(x) = 1$, $r(x) = 0$.

L'équation de Bessel $(xy')' + \lambda(xy) = 0$ est aussi une équation de Sturm-Liouville.

Définition 1.2. On appelle solution de l'équation de Sturm-Liouville (2.29) tout couple (λ^*, y^*) tel que la fonction $y^*(x)$ est continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et vérifie l'équation (2.29) avec la valeur de paramètre $\lambda = \lambda^*$.

On appelle alors λ^* valeur propre de l'équation de Sturm-Liouville et la fonction $y^*(x)$ fonction propre de l'équation de Sturm-Liouville.

On peut associer à une équation de type (2.29) des conditions aux bords différentes. Les ensembles de solutions ainsi obtenues forment des familles de fonctions orthogonales pouvant servir de bases pour une décomposition en série de Fourier.

2 Equation de Laplace avec des conditions aux bords homogènes

Dans la suite nous allons étudier en détails un exemple de problème de Sturm-Liouville particulier que nous allons rencontrer plusieurs fois. Il s'agit de l'équation de Laplace en dimension 1 avec les conditions aux bords homogènes.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in [0, L] \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle $y'' + \lambda y = 0$ est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à coefficients constants. La solution générale dépend du signe du paramètre λ .

– Si $\lambda > 0$

$$S = \{A \sin(x\sqrt{\lambda}) + B \cos(x\sqrt{\lambda}) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

– Si $\lambda = 0$

$$S = \{Ax + B \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

– Si $\lambda < 0$

$$S = \{A \exp(x\sqrt{-\lambda}) + B \exp(-x\sqrt{-\lambda}) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On détermine ensuite les constantes A et B à partir des conditions aux bords spécifiées.

– Si $\lambda > 0$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

et

$$y(L) = 0 \Rightarrow A \sin(L\sqrt{\lambda}) = 0, \quad A \neq 0 \Rightarrow \sin(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

Cette condition est satisfaite si et seulement si $L\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$. Nous obtenons ainsi une condition pour le paramètre λ . Le problème (??) admet une solution si et seulement si le paramètre λ prend l'une des valeurs

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

– Si $\lambda = 0$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

et

$$y(L) = 0 \Rightarrow AL = 0, \Rightarrow A = 0$$

Nous n'avons ainsi trouvé qu'une solution triviale $y(x) = 0$. Donc $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.

– Si $\lambda < 0$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

et

$$y(L) = 0 \Rightarrow Ae^{L\sqrt{-\lambda}} + Be^{-L\sqrt{-\lambda}} = 0 \Rightarrow A(e^{L\sqrt{-\lambda}} - e^{-L\sqrt{-\lambda}}) = 0$$

On découvre également que la seule solution possible est celle avec $A = B = 0$. Donc il n'y a pas de valeurs propres négatives.

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante :

Proposition 1.1. *L'ensemble Σ de valeurs propres du problème (??) est donné par*

$$\Sigma = \left\{ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Pour tout $\lambda_n \in \Sigma$ les fonctions propres correspondantes sont de la forme

$$\varphi_n(x; A) = A \sin\left(\frac{xn\pi}{L}\right), \quad A \in \mathbb{R}^*$$

Remarque 1.1. *Nous venons de montrer dans le cas particulier de problème (??) que à chaque valeur propre λ_n correspond un ensemble de fonctions propres. Notons*

$$F_n = \left\{ A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad A \in \mathbb{R}^* \right\}$$

En le complétant par la fonction nulle on obtient

$$V_n = F_n \cup \{0\} = \left\{ A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad A \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce dernier ensemble est un sous-espace vectoriel de $C^\infty[0, L]$ de dimension 1. Sa base est constituée d'une seule fonction $\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

Remarque 1.2. *Il s'ensuit de la proposition 1.1 que le problème (??) admet une suite infinie de solutions*

$$\{(\lambda_n, \varphi_n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

t.q.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Or, nous savons (par la théorie des séries de Fourier) que toute fonction $f \in C^2[0, L]$ se décompose en série de sin et cos. Dans le contexte particulier de la proposition 1.1 cela signifie que toute fonction $f \in C^2[0, L]$ se décompose en série de solutions du problème (??).

3 Propriétés de l'ensemble de solutions d'un problème de Sturm-Liouville

Nous venons de montrer, dans le cas particulier de l'équation de Laplace aux conditions aux bords homogènes, que l'ensemble de solutions d'un problème de Sturm-Liouville peut former une base orthogonale dans l'espace $C^2[0, L]$ et que cela permet de décomposer n'importe quelle autre fonction de cet espace en série de Fourier généralisée par rapport à cette base.

Pour pouvoir généraliser cette propriété intéressante à d'autres problèmes de Sturm-Liouville, de type (2.29), il faudrait prouver qu'un tel problème admet un ensemble de solutions deux à deux orthogonales et que cet ensemble est complet dans $C^2[0, L]$.

Remarque 1.3. *Si $\rho(x)$ est continue et positive on peut définir sur $L^2[a, b]$ le produit scalaire "pondéré"*

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \rho(x) \varphi(x) \psi(x) dx$$

Dans ce contexte la proposition suivante signifie que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les fonctions propres correspondantes y_1 et y_2 sont orthogonales par rapport à ce produit scalaire.

Proposition 1.2. *Soient (λ_1, y_1) et (λ_2, y_2) deux solutions de l'équation (2.29) sur une intervalle $[a, b]$ vérifiant aux bords les conditions suivantes :*

$$s(b)[y_1(b)y_2'(b) - y_1'(b)y_2(b)] = s(a)[y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a)]$$

Alors

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b y_1(x)y_2(x)\rho(x) dx = 0 \quad (1.1)$$

Preuve de Proposition 1.2

Puisque $y_1(x)$ vérifie l'équation (2.29) nous avons

$$(s(x)y_1'(x))' + (\lambda_1\rho(x) - r(x))y_1(x) = 0$$

Multiplions la dernière équation par $y_2(x)$:

$$(s(x)y_1'(x))'y_2(x) + (\lambda_1\rho(x) - r(x))y_1(x)y_2(x) = 0$$

et intégrons :

$$\int_a^b (s(x)y_1'(x))'y_2(x) dx + \lambda_1 \int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x) dx - \int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x) dx = 0$$

Une intégration par parties dans la première intégrale donne :

$$[s(x)y_1'(x)y_2(x)]_a^b - \int_a^b s(x)y_1'y_2'(x) dx + \lambda_1 \int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x) dx - \int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x) dx = 0$$

Encore une intégration par parties :

$$[s(x)y_1'(x)y_2(x)]_a^b - [s(x)y_2'(x)y_1(x)]_a^b + \int_a^b (s(x)y_2')'y_1(x)dx + \lambda_1 \int_a^b \rho(x)y_1(x)y_2(x)dx - \int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0$$

C.Q.F.D

Voici quelques exemples de conditions aux bords courantes qui vérifient (??).

Exemple 1.2 (Conditions aux bords séparables). On appelle conditions aux bords séparables

$$\cos \alpha y'(a) - \sin \alpha y(a) = 0$$

$$\cos \beta y'(b) + \sin \beta y(b) = 0$$

Ici α et β sont des constantes réelles. Les cas les plus souvent rencontrés sont :

$$y'(a) = y'(b) = 0, \quad (\alpha = \beta = 0)$$

$$y(a) = y(b) = 0, \quad (\alpha = \beta = \frac{\pi}{2})$$

Exemple 1.3 (Conditions aux bords périodiques). conditions aux bords périodiques

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

En supposant que $s(a) = s(b)$ on constate facilement que (??) est vérifiée.

Dans le cas de l'équation de Laplace, nous avons remarqué (voir la Remarque ??ue à chaque valeur propre particulière λ_n correspondait une famille de fonctions propres, formant un sous-espace vectoriel de dimension 1. Le théorème qui suit généralise cette propriété.

Théorème 1.1. Soient y_1 et y_2 deux solutions non triviales du problème suivant

$$\begin{cases} (sy')' + (\lambda\rho - q)y = 0 \\ \cos \alpha y'(a) - \sin \alpha y(a) = 0 \\ \cos \beta y'(b) + \sin \beta y(b) = 0 \end{cases}$$

Alors $\exists C \neq 0$ t.q. $y_1(x) = Cy_2(x), \forall x \in [a, b]$.

Il reste à montrer la complétude d'une telle famille de solutions.

Théorème 1.2. *Soit le problème de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} (sy')' + (\lambda\rho - q)y = 0 \\ \cos \alpha y'(a) - \sin \alpha y(a) = 0 \\ \cos \beta y'(b) + \sin \beta y(b) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Il admet une suite infinie de solutions

$$\{(\lambda_n, \varphi_n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

telle que toute fonction $f \in C^2[a, b]$ vérifiant les conditions aux bords (1.2) se décompose en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.3)$$

avec les coefficients donnés par

$$A_n \cdot \int_a^b \varphi_n^2(x) \rho(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx$$

La série (1.3) converge uniformément.

Chapitre 2

Introduction aux équations aux dérivées partielles

1 Définitions et notations

Définition 2.1. On appelle équation aux dérivées partielles linéaire de second ordre une équation dont l'inconnue est une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = F(x) \quad (2.1)$$

où $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ sont des fonctions continues sur D .

Définition 2.2. L'équation (2.1) s'appelle homogène si $F = 0$ et non homogène sinon.

Sauf en cas de confusion possible, nous allons parler dans la suite des équations aux dérivées partielles (EDP), sans préciser à chaque fois qu'il s'agit des équations linéaires de second ordre.

On suppose que les coefficients $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ forment une matrice symétrique. Notons que cette hypothèse n'entraîne pas de perte de généralité car on peut toujours regrouper les termes, en posant pour les éléments non diagonaux :

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

2 Les conditions aux bords et les conditions initiales associées

Nous savons déjà, par la théorie des équations différentielles ordinaires, que la solution d'une telle équation n'est pas unique (sauf quelques rares exceptions). L'ensemble de toutes les solutions d'une équation différentielle s'appelle solution générale. Nous avons vu que dans le cas des équations linéaires, par exemple, la solution générale peut être décrite sous forme paramétrique, à l'aide de quelques constantes indéterminées. Pour déterminer une solution particulière nous devons généralement indiquer des conditions supplémentaires qu'elle doit vérifier. Toujours dans le cas des équations différentielles ordinaires nous avons vu deux façons d'indiquer des conditions : sous forme de conditions initiales ou sous forme de conditions aux bords.

Dans le cadre de la théorie des équations en dérivées partielles il s'agit, dans la plupart des cas, de trouver une solution particulière d'une équation vérifiant un certain nombre de conditions, imposées par les contraintes physiques ou autres.

On peut s'apercevoir que certains problèmes liés aux équations en dérivées partielles combinent les conditions aux bords et les conditions initiales.

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on distingue trois types de conditions aux bords pour une équation définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Condition de Dirichlet ou condition de I^{er} type

$$[u]_{x \in \partial\Omega} = \phi(x)$$

Condition de Neumann ou condition de II^{ème} type

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{x \in \partial\Omega} = \phi(x)$$

Condition mixte ou condition de III^{ème} type

$$\left[\alpha(x)u(x) + \beta(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right]_{x \in \partial\Omega} = \phi(x)$$

3 Classification des équations linéaires d'ordre 2

Les équations aux dérivées partielles peuvent être regroupées en classes d'équivalence selon leurs propriétés. Cette classification permet de simplifier la résolution et l'étude de beaucoup d'équations. En effet, un changement de variables suffit parfois pour réduire une équation à une forme canonique, pour laquelle on connaît la solution.

Commençons par définir la relation d'équivalence sur l'ensemble des équations linéaires d'ordre 2.

Pour cela considérons un changement de variables

$$\begin{cases} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ y_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

Notons

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

l'application définie par les fonctions φ_i ci-dessus.

Définition 2.3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On dit que deux EDP sont équivalentes au voisinage $U(x_0)$ du point x_0 s'il existe un changement de variables (2.2) tel que

(i) les fonctions $\varphi_i(x)$ sont deux fois continûment dérivables sur $U(x_0)$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \varphi_i \in \mathcal{C}^2(U(x_0))$$

(ii) l'application Φ est bijective sur $U(x_0)$ vers $V(y_0)$, voisinage de $y_0 = (\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_n(x_0))$

(iii) il existe un voisinage $V(y_0)$ de $y_0 = (\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_n(x_0))$ tel que toutes les applications réciproques $\varphi_i^{-1}(y)$ sont deux fois continûment dérivables sur $V(y_0)$ et que ledit changement de variables transforme l'une des EDP en l'autre.

On peut donc regrouper les EDP en classes d'équivalence par rapport à la relation d'équivalence que l'on vient de définir. Il est alors intéressant de choisir dans chacune des classes considérées une équation dont la forme est la plus simple pour l'étude.

3.1 Formes canoniques des EDP à deux variables

Soit une équation définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = F(x, y) \quad (2.3)$$

Cherchons un changement de variables sous la forme :

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (2.4)$$

Après un tel changement l'équation (2.3) se transforme en l'équation suivante

$$\tilde{a}_{11}(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + \tilde{b}_1(\xi, \eta)u_\xi + \tilde{b}_2(\xi, \eta)u_\eta + \tilde{c}(\xi, \eta)u = \tilde{F}(\xi, \eta) \quad (2.5)$$

avec les nouveaux coefficients définis par

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ \tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ \tilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \\ \tilde{b}_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \\ \tilde{b}_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \\ \tilde{c}(\xi, \eta) = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \\ \tilde{F}(\xi, \eta) = F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous pouvons remarquer que les trois premières équations ci-dessus ont une interprétation matricielle. En effet, notons

$$J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

le jacobien de l'application de changement de variables. Alors nous pouvons écrire :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = J \cdot A \cdot J^T \quad (2.7)$$

Les matrices A et \tilde{A} étant symétriques, il est possible de choisir la transformation J de telle sorte que la matrice \tilde{A} soit diagonale et sous forme canonique (voir le cours de Mathématiques pour Ingénieur de Marietta Manolessou pour quelques rappels). Dans le cas particulier de dimension 2 toute matrice symétrique non nulle admet une unique forme canonique parmi les trois possibles ci-dessous :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc partager l'ensemble d'équations en trois classes d'équivalence, chacune correspondant à l'une des formes canoniques de la matrice A de la partie principale de l'équation.

On remarquera que

$$\det(C_1) > 0, \quad \det(C_2) < 0, \quad \det(C_3) = 0$$

et que la transformation (2.7 préserve le signe du déterminant, car

$$\det(\tilde{A}) = \det(J)\det(A)\det(J^T) = (\det(J))^2\det(A)$$

Donc pour déterminer à quelle classe appartient une équation donnée il suffit d'évaluer le signe du déterminant de la matrice A de sa partie principale.

Ainsi, la classification des EDP linéaires de deux variables, peut se faire selon la règle suivante : On note

$$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -\det(A) \quad (2.8)$$

Alors

Si $D > 0$. Alors l'équation (2.3) est de type **hyperbolique**.

Si $D < 0$. Alors l'équation (2.3) est de type **elliptique**.

Si $D = 0$. Alors l'équation (2.3) est de type **parabolique**.

Dans chacun des cas il est possible de déterminer le changement de variables permettant de transformer l'équation donnée, de façon à obtenir sa forme canonique. Le principe de construction du changement de variables correspondant est basé sur la recherche de caractéristiques d'une équation. Nous présentons ici, sans démonstration, la méthode.

On appelle équation caractéristique (différentielle) associée à l'équation (2.3) l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \left(\frac{dy}{dx} \right) + a_{22} = 0 \quad (2.9)$$

On remarque alors que D défini ci-dessus par (2.8) est le discriminant de cette équation.

Alors l'équation caractéristique admet deux solutions :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} \end{cases} \quad (2.10)$$

Le signe du discriminant D détermine le type de l'équation (2.3) et les équations (2.10) le changement de variables qui la réduit à sa forme canonique.

Proposition 2.1. *Soit $M \in \mathbb{R}^2$ un point et soit $D = D(M)$ la valeur de discriminant de l'équation caractéristique défini par (2.8). Alors l'un des trois cas ci-dessous se présente :*

1. $D > 0$. **Alors l'équation (2.3) est de type hyperbolique.** L'équation caractéristique admet deux solutions réelles indépendantes selon (2.10) :

$$y = f_1(x) + C_1, \quad y = f_2(x) + C_2$$

Le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi = y - f_1(x) \\ \eta = y - f_2(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

réduit l'équation (2.3) à la forme canonique suivante :

$$u_{\xi\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{c}u + \tilde{F}(\xi, \eta) = 0$$

Un deuxième changement de variables

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

permet alors d'obtenir une autre forme canonique de la même équation :

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \bar{b}_1 u_\alpha + \bar{b}_2 u_\beta + \bar{c}u + \bar{F}(\alpha, \beta) = 0$$

2. $D = 0$. **Alors l'équation (2.3) est de type parabolique.** L'équation caractéristique admet une seule solution réelle :

$$y = f_1(x) + C_1$$

En posant

$$\begin{cases} \xi = y - f_1(x) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\eta(x, y)$ est une fonction arbitraire on obtient le changement de variables qui réduit l'équation (2.3) à la forme canonique suivante :

$$u_{\eta\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{c}u + \tilde{F}(\xi, \eta) = 0$$

3. $D < 0$. Alors l'équation (2.3) est de type elliptique. L'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées selon (2.10) :

$$y = f_1(x) + C_1, \quad y = f_2(x) + C_2$$

Le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi = y - f_1(x) \\ \eta = y - f_2(x) \end{cases} \quad (2.14)$$

réduit l'équation (2.3) à la forme canonique suivante :

$$u_{\xi\eta} + \tilde{b}_1 u_\xi + \tilde{b}_2 u_\eta + \tilde{c}u + \tilde{F}(\xi, \eta) = 0$$

Un deuxième changement de variables

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{Re}(\xi) \\ \beta = \operatorname{Im}(\xi) \end{cases} \quad (2.15)$$

permet alors d'obtenir une autre forme canonique de la même équation :

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \bar{b}_1 u_\alpha + \bar{b}_2 u_\beta + \bar{c}u + \bar{F}(\alpha, \beta) = 0$$

3.1.1 Exemples

Exemple 2.1. Soit l'équation

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0 \quad (2.16)$$

Ecrivons l'équation caractéristique associée :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0$$

Calculons le discriminant :

$$D = 1 + 3 = 4 > 0$$

Donc c'est une équation hyperbolique dans tous les points car les coefficients sont constants.

Trouvons le changement des variables qui ramène l'équation à sa forme canonique. Les deux solutions réelles de l'équation caractéristique sont définies par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{-1 + \sqrt{4}}{1} = 1 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{-1 - \sqrt{4}}{1} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + C_1 \\ y = -3x + C_2 \end{cases}$$

On pose donc

$$\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = y + 3x \end{cases}$$

Calculons les nouveaux coefficients d'après (2.6) :

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y = -3 - (-1 + 3) - 3 = -8$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y = 1 \\ \tilde{b}_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y = 1\end{aligned}$$

On obtient donc une première forme canonique de l'équation

$$-8u_{\xi\eta} + u_{\xi} + u_{\eta} = 0$$

En posant ensuite

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases} \quad (2.17)$$

on a

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - \frac{1}{2}u_{\alpha} = 0$$

Exemple 2.2. Considérons l'équation à coefficients non constants :

$$u_{xx} - xu_{yy} = 0$$

La matrice associée est la suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0$$

Calculons le discriminant :

$$D = x$$

Le signe du discriminant dépend de la valeur de x . Donc cette équation change de classe en fonction de domaine de définition.

1. Si $x > 0$ l'équation est de type hyperbolique L'équation caractéristique admet alors deux solutions réelles distinctes définies par

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \\ \frac{dy}{dx} = -\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x^{3/2} + C_1 \\ y = -\frac{2}{3}x^{3/2} + C_2 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{2}{3}x^{3/2} \\ \eta = y + \frac{2}{3}x^{3/2} \end{cases} \quad (2.18)$$

Calculons les nouveaux coefficients d'après (2.6) :

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y = -x - x = -2x$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \tilde{b}_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$4xu_{\xi\eta} - \frac{1}{2\sqrt{x}}u_\xi + \frac{1}{2\sqrt{x}}u_\eta = 0 \Leftrightarrow 8x^{3/2}u_{\xi\eta} - u_\xi + u_\eta = 0$$

D'après le changement des variables (2.20) on a $\eta - \xi = \frac{4}{3}x^{3/2}$. On obtient donc une première forme canonique de l'équation

$$6(\eta - \xi)u_{\xi\eta} - u_\xi + u_\eta = 0$$

En posant ensuite

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases} \quad (2.19)$$

on a

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} - \frac{1}{3\beta}u_\alpha = 0$$

2. Si $x < 0$ l'équation est de type elliptique. L'équation caractéristique admet alors deux solutions réelles distinctes définies par

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = i\sqrt{-x} \\ \frac{dx}{dy} = -i\sqrt{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2i}{3}(-x)^{3/2} + C_1 \\ y = -\frac{2i}{3}(-x)^{3/2} + C_2 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{2i}{3}(-x)^{3/2} \\ \eta = y + \frac{2i}{3}(-x)^{3/2} \end{cases} \quad (2.20)$$

Nous allons directement effectuer le changement des variables réel :

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{Re}(\eta) = y \\ \beta = \operatorname{Im}(\eta) = \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \end{cases} \quad (2.21)$$

Calculons les nouveaux coefficients d'après (2.6) :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= \tilde{a}_{22} = a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + a_{22}\alpha_y\beta_y = -x \\ \tilde{a}_{12} &= 0 \\ \tilde{b}_1 &= a_{11}\alpha_{xx} + 2a_{12}\alpha_{xy} + a_{22}\alpha_{yy} + b_1\alpha_x + b_2\alpha_y = 0 \\ \tilde{b}_2 &= a_{11}\beta_{xx} + 2a_{12}\beta_{xy} + a_{22}\beta_{yy} + b_1\beta_x + b_2\beta_y = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$-x(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}) + \frac{1}{2\sqrt{-x}}u_{\beta} = 0 \Leftrightarrow 2(-x)^{3/2}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}) + u_{\beta} = 0$$

D'après le changement des variables (2.20) on a $3\beta = 2(-x)^{3/2}$. On obtient donc la forme canonique de l'équation

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta}u_{\alpha} = 0$$

3.2 Formes canoniques des EDP à plusieurs variables

Soit M un point de l'espace \mathbb{R}^n de coordonnées $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Notons $U(M)$ un voisinage de ce point. Etudions de plus près le résultat d'un changement de variables (2.2) dans une EDP au voisinage $U(M)$ d'un point.

D'après les hypothèses de la définition 2.3 on peut inverser les changements de variables (2.2). Notons

$$\Theta = \Phi^{-1}$$

l'application réciproque de Φ . On a

$$\begin{cases} x_1 &= \theta_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_2 &= \theta_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ x_n &= \theta_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2.22)$$

et on peut écrire

$$y = \Phi(x) \Leftrightarrow x = \Theta(y)$$

Posons $v(y) = u(\Theta(y))$. Alors $u(x) = v(\Phi(x))$ ce qui s'écrit :

$$u(x_1, \dots, x_n) = v(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Calculons les dérivées partielles de la solution par rapport aux variables x_i en fonction des dérivées par rapport aux nouvelles variables y_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

Maintenant on substitue dans l'équation de départ les fonctions $\theta_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ à la place des variables x_i est les expressions des dérivées partielles que l'on vient de calculer. Après un changement d'ordre de sommation on trouve :

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k(y) \cdot \frac{\partial v}{\partial y_k} + c(x(y))v + d(x(y)) = 0 \quad (2.23)$$

Cependant, dans les problèmes rencontrés en physique, on utilise principalement trois classes d'équations suivantes : les équations elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Définition 2.4. On dit que l'EDP (2.1) est elliptique au point M si $p + q = n$ et soit $p = n$ soit $q = n$.

On dit qu'une EDP est elliptique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si elle est elliptique dans chaque point de $M \in \Omega$.

Exemple 2.3. L'équation de Laplace

$$\Delta u = 0$$

avec

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = f$$

sont des équations elliptiques dans tout \mathbb{R}^n .

Définition 2.5. On dit que l'EDP (2.1) est hyperbolique au point M si $p + q = n$ et soit $p = n - 1$ soit $q = n - 1$. On dit qu'une EDP est hyperbolique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si elle est hyperbolique dans chaque point de $M \in \Omega$.

Exemple 2.4. L'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

est une équation hyperbolique.

Définition 2.6. On dit que l'EDP (2.1) est parabolique au point M si $p + q = n - 1$ et soit $p = 0$ soit $q = 0$. En plus, le coefficient devant $\frac{\partial u}{\partial y_n}$ est différent de zéro. On dit qu'une EDP est parabolique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si elle est parabolique dans chaque point de $M \in \Omega$.

Exemple 2.5. L'équation de diffusion de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

est une équation parabolique.

Remarque 2.1. La classification établie ci-dessus est "locale" : elle a un sens seulement pour un point donné. Ainsi, une seule et même équation peut appartenir à des classes différentes dans des voisinages des points différents. Sauf, bien sûr, les équations à coefficients constants. En effet, la matrice initiale A associée à une telle équation ne dépend pas des variables x_1, x_2, \dots, x_n . Donc, sa forme canonique non plus, ni les nombres p et q . Une telle équation appartient ainsi à une seule classe d'équivalence sur tout le domaine de sa définition.

Remarque 2.2. Nous venons de montrer que toute EDP peut être ramenée à une forme canonique par un changement de variables dans un point choisi, M . En effet, le jacobien du changement de variables au point M est donné par la matrice de passage Φ associée à la matrice A .

Mais la possibilité de ramener une équation à sa forme canonique sur tout un domaine n'est pas aussi évidente. Même s'il a été établi que sur tout le domaine l'équation appartient à la même classe d'équivalence.

Dans le cas où les coefficients de l'équation sont constants, la matrice Φ , le jacobien du changement des variables, est constante. Dans ce cas il n'est pas difficile de déterminer les fonctions $\phi_i(x_1, \dots, x_n)$. (Voir exemple 2.6 ci-dessous.) Si les coefficients ne sont pas constants, c'est généralement impossible pour $n > 3$. En effet, le changement de variables recherché est constitué de n fonctions inconnues $\phi_i(x_1, \dots, x_n)$. Pour rendre la matrice \tilde{A} diagonale, ces fonctions doivent vérifier $\frac{n^2 - n}{2}$ équations correspondantes aux éléments non diagonaux d'une matrice symétrique. La solution est généralement impossible si le nombre d'équations dépasse celui des inconnues, s'est-à-dire, si $\frac{n^2 - n}{2} > n$ ce qui équivaut à $n > 3$.

Dans le cas particulier des équations à deux variables que nous étudions plus loin en détail on peut toujours ramener une équation à sa forme canonique.

3.2.1 Exemple travaillé

Exemple 2.6. Soit l'équation

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} + u_x = 0$$

Trouvons la forme canonique de cette équation différentielle. La matrice de la partie principale de l'équation est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour diagonaliser la matrice on calcule ses valeurs propres

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)^2 - (2 - \lambda) - (2 - \lambda) = \lambda(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

Ensuite on cherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.

Pour $\lambda_1 = 0$ on cherche le vecteur $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $Av_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_3 \end{cases}$$

On peut prendre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De façon analogue on trouve les deux autres vecteurs :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On forme la première matrice de passage à partir des trois vecteurs propres :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve :

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$R^T P^T A P R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice recherchée est

$$\Phi = PR = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0.5 & -1 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Le changement de variables correspondant à la matrice Φ est le suivant :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_3 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = -x_1 + 0.5x_2 - x_3 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = x_1 + 0.5x_2 + x_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \begin{cases} x_1 = y_1 + 0.5y_2 - 0.5y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_1 - y_2 + y_3 \end{cases} \quad (2.26)$$

Calculons selon l'équation (2.25) les coefficients \tilde{b}_k devant les dérivées $\frac{\partial u}{\partial y_k}$. Remarquons que, d'après la définition de changement de variables (2.26) on a $\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. On a également les coefficients de l'équation de départ : $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = b_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 2 \\ \tilde{b}_2 &= b_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -1 \\ \tilde{b}_3 &= b_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, après ce changement de variables on voit que l'équation différentielle est de classe parabolique et sa nouvelle forme est :

$$2 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} - \frac{\partial u}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial y_3} = 0$$

4 Techniques fondamentales de résolution des EDP

4.1 Séparation des variables

Considérons une équation aux dérivées partielles à deux variables définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = F(x, y) \quad (2.27)$$

La technique de séparation des variables consiste à rechercher des solutions particulières sous la forme

$$u(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

En substituant $u(x, y)$ sous cette forme dans l'équation (2.27) on essaie de trouver des équations différentielles ordinaires que doivent vérifier les fonctions inconnues $f_1(x)$ et $f_2(y)$. Ces équations contiennent généralement un paramètre, appelé "constante de séparation". Les solutions particulières ainsi trouvées s'appellent "solutions séparées".

4.1.1 Exemple : l'équation de Laplace

Nous allons illustrer ici la technique de séparation de variables sur l'exemple de l'équation de Laplace. **Le résultat obtenu dans cet exemple nous sera utile dans la suite.**

Exemple 2.7.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

En posant

$$u(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

on obtient

$$f_1''(x)f_2(y) + f_1(x)f_2''(y) = 0$$

En supposant que $u(x, y) \neq 0$ on divise par $f_1(x) \cdot f_2(y)$:

$$\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2''(y)}{f_2(y)} = 0$$

Le premier terme ci-dessus dépend uniquement de la variable x et le second uniquement de y . Cela ne peut être vrai que si les deux sont constants. On a donc

$$\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{f_2''(y)}{f_2(y)} = -\lambda$$

où λ est la constante de séparation.

On obtient ainsi le système suivant de deux équations ordinaires d'ordre 2

$$\begin{cases} f_1''(x) - \lambda f_1(x) = 0 \\ f_2''(y) + \lambda f_2(y) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

les solutions de chacune des deux équations du système dépendent du signe du paramètre λ :

$$f_1(x) = \begin{cases} Ae^{x\sqrt{\lambda}} + Be^{-x\sqrt{\lambda}} & \lambda > 0 \\ Ax + B & \lambda = 0 \\ A \cos(x\sqrt{-\lambda}) + B \sin(x\sqrt{-\lambda}) & \lambda < 0 \end{cases}$$

et

$$f_2(y) = \begin{cases} C \cos(y\sqrt{\lambda}) + D \sin(y\sqrt{\lambda}) & \lambda > 0 \\ Cy + D & \lambda = 0 \\ Ce^{y\sqrt{-\lambda}} + De^{-y\sqrt{-\lambda}} & \lambda < 0 \end{cases}$$

Finalement les solutions séparées de l'équation de Laplace sont

$$u(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} (Ae^{x\sqrt{\lambda}} + Be^{-x\sqrt{\lambda}})(C \cos(y\sqrt{\lambda}) + D \sin(y\sqrt{\lambda})) & \lambda > 0 \\ (Ax + B)(Cy + D) & \lambda = 0 \\ (A \cos(x\sqrt{-\lambda}) + B \sin(x\sqrt{-\lambda}))(Ce^{y\sqrt{-\lambda}} + De^{-y\sqrt{-\lambda}}) & \lambda < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Remarque 2.3. *Dans l'exemple ci-dessus nous avons trouvé une infinité de solutions séparées d'une équation. En effet, elles sont définies par un paramètre λ qui peut prendre toutes les valeurs réelles. Nous allons découvrir que c'est souvent le cas. On peut trouver pour d'autres équations des ensembles infinis, dénombrables ou non, de solutions séparées.*

Dans certains cas ces familles de solutions particulières jouent un rôle important dans la recherche d'autres solutions possibles. En effet, dans certains cas on peut considérer ces familles comme bases dans des espaces de fonctions bien précis (de dimensions infinies). Cela permet de justifier la recherche des solutions sous forme de séries de Fourier ou de transformées de Fourier.

Chapitre 3

Problèmes paraboliques aux limites en dimension spatiale 1.

1 Introduction aux équations paraboliques. Propagation de chaleur

On considère une barre homogène de longueur l . Supposons que la barre est suffisamment fine pour que la température de tous les points d'une section transversale soit identique.

Ainsi le processus de la propagation de la chaleur peut être décrit à l'aide d'une fonction $u(x, t)$ qui définit la température pour chaque point $x \in [0, l]$ de la barre et à chaque moment de temps t .

Supposons que la barre est isolée. Si les deux extrémités sont maintenues aux températures constantes u_1 et u_2 il est bien connu qu'au bout d'un certain temps une distribution linéaire de températures s'établit :

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x \quad (3.1)$$

Nous nous intéressons au processus qui mène à ce résultat. Pour obtenir l'équation que vérifie $u(x, t)$ nous allons utiliser les lois physiques suivantes :

- **Loi de Fourier.** Elle stipule : *La différence de températures entre deux points d'un corps provoque un flux de chaleur. La quantité de chaleur qui transite par un point x donné par unité de temps est égale à*

$$q(x) = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

où k est le coefficient de conductivité thermique. Nous supposons ici que ce coefficient est constant.

- La circulation d'un flux thermique dans un intervalle $[x, x + dx]$ de la barre de section transversale S provoque un gain d'énergie par unité de temps égal à

$$Q = Sq(x) - Sq(x + dx) \sim -S \frac{\partial q}{\partial x} dx$$

- L'absorption de cette quantité d'énergie par l'intervalle $[x, x + dx]$ de la barre provoque un changement de température de ce dernier. Etant donné que le volume de l'intervalle est égale à Sdx on a la relation :

$$Q = c\rho Sdx \frac{\partial u}{\partial t}$$

où c est la chaleur spécifique de la matière considérée et ρ est la densité de la barre.

On en déduit que

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

Nous venons donc d'obtenir la forme la plus simple de l'équation de propagation de chaleur.

Le flux thermique que nous étudions ici doit donc vérifier cette équation. Il doit également satisfaire un certain nombre de conditions supplémentaires : une condition initiale (distribution initiale des températures) :

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

et une condition aux bords (températures des extrémités) :

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t)$$

Ainsi le problème complet qui décrit un processus de propagation de chaleur dans une barre de longueur l est posé en termes suivants :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in]0, l[, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in]0, l[\\ u(0, t) = g_1(t) \\ u(l, t) = g_2(t) \end{cases}$$

Ce problème peut être généralisé à un domaine quelconque $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et au cas où une source de chaleur $f(x, t)$ est présente :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \Omega \\ u(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = \psi(t) \end{cases}$$

2 Position du problème

Dans ce chapitre on considère le problème aux limites et aux conditions initiales suivant

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ u(0, t) = \varphi(t) & t \in [0, T] \\ u(L, t) = \psi(t) & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.3)$$

où $a > 0$ est une constante réelle positive.

Définition 3.1 (Solution classique du problème aux conditions initiale et aux limites).
On appelle solution classique du problème (3.3) toute fonction

$$u(x, t) \in \mathcal{C}_t^1(]0, L[\times]0, T]) \cap \mathcal{C}_x^2(]0, L[\times]0, T])$$

qui vérifie l'équation, la condition initiale et les deux conditions aux limites.

2.1 Cas de conditions aux limites homogènes

Supposons que $\varphi(t) = \psi(t) = 0$. Le problème (3.3) s'écrit alors

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour résoudre ce problème on utilisera le **principe de superposition** :

Lemme 3.1 (Principe de superposition). Soient $v(x, t)$ solution du problème homogène

$$\begin{cases} v_t = av_{xx} & (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \\ v(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.5)$$

et $w(x, t)$ solution du problème non homogène à conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} w_t = aw_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \\ w(x, 0) = 0 & x \in]0, L[\\ w(0, t) = w(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.6)$$

Alors $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ est une solution du problème (6.3).

Preuve de Lemme 3.1

Posons $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$. Alors

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= v_t(x, t) + w_t(x, t) \\ &= av_{xx} + aw_{xx} + f(x, t) = au_{xx} + f(x, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ainsi $u(x, t)$ vérifie l'équation différentielle du problème (6.3). Il reste à vérifier les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= v(0, x) + w(0, x) = g(x) \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \end{aligned}$$

C.Q.F.D

2.2 Cas de conditions aux limites non homogènes

Lemme 3.2. *La solution du problème (3.3) peut s'écrire sous la forme*

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (3.8)$$

où

$$w(x, t) = \frac{L-x}{L}\varphi(t) + \frac{x}{L}\psi(t) \quad (3.9)$$

et où $v(x, t)$ est solution du problème aux conditions aux limites homogènes suivant :

$$\begin{cases} v_t = av_{xx} + f(x, t) - \frac{L-x}{L}\varphi'(t) - \frac{x}{L}\psi'(t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ v(x, 0) = g(x) - w(x, 0) & x \in]0, L[\\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.10)$$

Preuve de Lemme 3.2

En dérivant (3.8) par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} u_t &= v_t + w_t = v_t + \frac{L-x}{L}\varphi'(t) + \frac{x}{L}\psi'(t) \\ &= av_{xx} + f(x, t) - \frac{L-x}{L}\varphi'(t) - \frac{x}{L}\psi'(t) + \frac{L-x}{L}\varphi'(t) + \frac{x}{L}\psi'(t) \\ &= av_{xx} + f(x, t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Or, d'après (3.8), on a

$$u_{xx} = v_{xx} + w_{xx}$$

et, d'après (3.9),

$$w_x = -\frac{1}{L}\varphi(t) + \frac{1}{L}\psi(t), \quad w_{xx} = 0$$

Donc on a $u_{xx} = v_{xx} + w_{xx} = v_{xx}$. En substituant dans (3.11) on trouve :

$$u_t = av_{xx} + f(x, t) = au_{xx} + f(x, t)$$

Ainsi $u(x, t)$ vérifie l'équation du problème (3.3). La vérification des conditions initiales et aux limites est simple.

C.Q.F.D

Grâce à ce dernier lemme il suffit de résoudre un problème aux conditions aux limites homogènes. Pour cela on utilisera le lemme 3.1 qui nous permet de résoudre le problème (6.3) en deux étapes :

Etape 1 Résolution du problème homogène (sans second membre) (6.9).

Etape 2 Résolution du problème non homogène à conditions initiales nulles (6.10).

3 Résolution du problème homogène

Nous allons construire la solution du problème suivant :

$$u_t = au_{xx}, \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in]0, L[\quad (3.13)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.14)$$

Nous utilisons ici la méthode de séparation des variables. On cherche des solutions séparées de la forme : $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. La substitution dans l'équation (3.12) donne :

$$X(x) \cdot T'(t) = aT(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{aT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

où λ est la constante de séparation. Ainsi, les solutions séparées de l'équation (3.12), si elles existent, sont définies par les triplets $(\lambda, X(x), T(t))$ tels que

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda aT(t) & = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) & = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Pour qu'une telle fonction soit solution du problème (3.12)-(3.13)-(3.14), il faut également satisfaire les conditions aux limites et la condition initiale. Des conditions aux limites (3.14) on déduit immédiatement les conditions pour la fonction X : $X(0) = X(L) = 0$.

On remarque facilement (il s'agit d'une équation linéaire homogène simple) que la première des deux équations (3.15) admet une solution pour toutes les valeurs réelles du paramètre λ . Ces solutions sont de la forme :

$$T(t) = Ce^{-a\lambda \cdot t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

Ainsi il nous reste à trouver les couples (λ, X) , solutions du problème

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) & = 0 \\ X(0) = X(L) & = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Il s'agit ici d'un cas particulier de problème de Sturm-Liouville, étudié dans la section 2.

D'après la proposition 1.1, du chapitre 1, le problème (3.17) admet une infinité de solutions $\{(\lambda_n, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (3.18)$$

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.19)$$

En combinant avec (3.16) on obtient finalement que l'équation (3.12) admet une infinité de solutions séparées de la forme :

$$u_n(x, t) = C_n e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Toutes ces solutions vérifient les conditions aux limites (3.14). On remarque cependant qu'aucune des solutions séparées ne vérifie la condition initiale (3.13). Nous allons alors rechercher une solution sous forme de série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.20)$$

Pour qu'une telle fonction $u(x, t)$ puisse être substituée dans l'équation différentielle (3.12) il est nécessaire de justifier que $u(x, t) \in C_t^1([0, L] \times [0, T]) \cap C_x^2([0, L] \times [0, T])$. Il suffit pour cela de prouver que la série elle-même ainsi que les trois séries obtenues par dérivées "terme par terme" (une fois par rapport à t et deux fois par rapport à x) convergent uniformément. Bien sûr, cela dépend du choix des coefficients C_n . Nous allons ici justifier formellement le choix des coefficients C_n , en admettant sans démonstration la convergence uniforme des séries nécessaires.

Supposons donc que la suite de coefficients C_n , $n \in \mathbb{N}^*$ est telle que la série (3.20) ainsi que ses dérivées "terme par terme" convergent uniformément. Alors la substitution formelle de $u(x, t)$ dans l'équation (3.12) permet de montrer facilement que $u(x, t)$ vérifie cette équation. En effet, tous les éléments de la somme dans (3.20) sont solutions de l'équation différentielle. On obtient donc au final une série nulle. Les conditions aux limites sont également vérifiées, grâce à la définition des fonctions $X_n(x)$. Il reste donc à vérifier la condition initiale :

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Il s'ensuit que les coefficients C_k doivent être les coefficients de Fourier de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx \quad (3.21)$$

Théorème 3.1 (Solution du problème homogène). *Si $g(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$ alors la série (3.20) converge uniformément vers une fonction de classe $C_t^1([0, L] \times [0, T]) \cap C_x^2([0, L] \times [0, T])$ et définit une solution du problème (3.12)-(3.13)-(3.14).*

3.1 Exemple travaillé

Exemple 3.1. Résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = 100u_{xx} & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) & x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Solution

Ici nous avons : $L = 1$, $a = 100$, conditions aux limites homogènes, $f(x, t) = 0$, problème homogène. La condition initiale $g(x) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x)$ est une fonction de classe $C^2[0, 1]$ et vérifie $g(0) = g(1) = 0$. D'après le cours on peut écrire la solution $u(x, t)$ sous forme de série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-100 \cdot t} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-100 \cdot t \cdot n^2 \pi^2} \sin(n\pi x)$$

où C_n sont les coefficients de décomposition en série de Fourier de $g(x)$:

$$g(x) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$$

Dans ce cas particulier nous pouvons identifier les coefficients directement, en utilisant l'argument d'unicité de décomposition en série de Fourier. En effet, la fonction $g(x)$ est définie par une somme de sin. Donc

$$C_2 = 1, C_5 = -1, C_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2, 5\}$$

Donc

$$u(x, t) = C_2 e^{-100 \cdot t \cdot 2^2 \pi^2} \sin(2\pi x) + C_5 e^{-100 \cdot t \cdot 5^2 \pi^2} \sin(5\pi x) = e^{-400\pi^2 t} \sin(2\pi x) - e^{-2500\pi^2 t} \sin(5\pi x)$$

4 Solution du problème non homogène

Nous recherchons ici la solution du problème suivant :

$$u_t = au_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\quad (3.23)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in]0, L[\quad (3.24)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.25)$$

Par analogie avec les techniques de résolution des EDO linéaires non homogènes, nous utiliserons ici la méthode de variation de la constante. Nous recherchons donc la solution sous la forme de série :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \quad (3.26)$$

où $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$, $n \geq 1$.

Comme dans le paragraphe précédent nous supposons que la série ainsi que ses dérivées successives "terme à terme" convergent uniformément pour calculer "formellement" les coefficients $\alpha_n(t)$. Ainsi, en calculant "terme à terme" les dérivées u_t et u_{xx} et en les substituant dans l'équation (3.23) on obtient :

$$u_t - au_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha'_n(t) - a\lambda_n + a\lambda_n) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) = f(x, t) \quad (3.27)$$

Supposons que la fonction $f(x, t)$ admet pour chaque $t \in [0, T]$ une décomposition en série de Fourier selon la variable x :

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \quad (3.28)$$

où les coefficients $F_n(t)$ sont définis par

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(y, t) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) dy \quad (3.29)$$

En comparant les coefficients devant $\sin(\sqrt{\lambda_n} x)$ des séries (3.27) et (3.28) on constate que

$$\alpha'_n(t) e^{-a\lambda_n t} = F_n(t)$$

Donc

$$\alpha_n(t) = \alpha_n(0) + \int_0^t F_n(\tau) e^{a\lambda_n \tau} d\tau$$

Pour calculer $\alpha_n(0)$ on utilise la condition initiale (3.24) :

$$0 = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(0) \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n(0) = 0$$

On obtient finalement

$$\alpha_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{a\lambda_n \tau} d\tau \quad (3.30)$$

Après une vérification de convergence uniforme de toutes les séries concernées on obtient le théorème suivant (que nous admettons ici sans démonstration) :

Théorème 3.2 (Solution du problème non homogène). *Si $f(x, t)$ est une fonction continue sur $[0, L] \times [0, T]$, de classe C^2 selon la variable x sur $[0, L]$ et telle que $f(0, t) = f(L, t) = 0$ alors la série (3.26) où les coefficients $\alpha_n(t)$ sont définis par*

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^t \int_0^L f(y, \tau) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) e^{a\lambda_n \tau} dy d\tau$$

converge uniformément vers une fonction de classe $C_t^1([0, L] \times [0, T]) \cap C_x^2([0, L] \times [0, T])$ et définit une solution du problème (3.12)-(3.13)-(3.14).

5 Retour au principe de superposition.

Maintenant que nous avons calculé les solutions des problèmes de type homogène (6.9) et non homogène (6.10), nous pouvons formuler le théorème qui est la conséquence immédiate du principe de superposition formulé dans le lemme 3.1.

Théorème 3.3 (Solution du problème aux conditions au limites homogènes). *Soit le problème*

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.31)$$

Supposons que

1. $f(x, t)$ est une fonction continue sur $[0, L] \times [0, T]$, de classe C^2 selon la variable x sur $[0, L]$ et telle que $f(0, t) = f(L, t) = 0$
2. $g(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$

Alors la série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + \alpha_n(t)) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^t \int_0^L f(y, \tau) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) e^{a\lambda_n \tau} dy d\tau$$

et

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) dy$$

converge uniformément vers une fonction de classe $C_t^1(]0, L[\times]0, T[) \cap C_x^2(]0, L[\times]0, T[)$ et définit une solution du problème (3.31).

6 Conditions aux limites de Neumann ou mixtes

Dans les sections précédentes nous avons développé la méthodologie de résolution complète d'un problème aux limites de type Dirichlet. Cette même méthodologie, fondée sur le principe de superposition et sur la théorie de Schturm-Liouville, s'applique aussi dans le cas de conditions aux bords de types II ou III. En effet, nous avons vu dans le premier chapitre (voir la Section 1) que tous les problèmes de type Schturm-Liouville aux conditions séparables admettent une famille de solutions complète, pouvant servir de base pour une décomposition en série de Fourier. Or, les conditions de types II et III sont sparables. la seule chose qui change alors c'est la base de fonctions qui sera utilisée pour exprimer la solution d'un problème sous forme de série de Fourier.

Nous allons donc résumer ici la méthodologie générale de résolution d'un problème et l'illustrer sur un exemple de problème aux conditions aux limites mixtes.

6.1 Méthode générale de résolution d'un problème aux limites.

Méthode**Résolution d'un problème aux limites****Objectif**

Résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = \varphi(t) & t \in [0, T] \\ \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = \psi(t) & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.32)$$

où $a > 0$ est une constante réelle positive, les constantes $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ ainsi que les fonctions $f(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$ sont données. .

Etape 1**Conditions aux limites non homogènes**

Cette étape doit être abordée seulement si les conditions aux limites sont non homogènes (fonctions $\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$) non nulles. Elle consiste à "annuler" ces conditions aux bords, en trouvant une fonction $w(x, t)$ qui les vérifie et en posant $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$.

1. Si les deux conditions aux bords sont de type I, la fonction $w(x, t)$ est donnée par le lemme 3.2.
2. Si au moins l'une des deux conditions aux bords est de type mixte, on cherche cette fonction sous la forme

$$w(x, t) = A(t)x + B(t)x^2$$

et on identifie les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ à partir des deux conditions aux limites.

Etape 2**Principe de superposition**

Après une éventuelle étape de transformation des conditions aux bords, nous sommes amenés à résoudre un problème de type

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.33)$$

d'après le principe de superposition, on peut chercher la solution sous forme

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_{nh}(x, t)$$

où u_h et u_{nh} sont respectivement solutions de problèmes homogène et non homogène. (Voir 3.1)

Etape 3 **Problème homogène**

A cette étape on cherche à résoudre un problème de type

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.34)$$

On applique la **technique de séparation des variables**, en résolvant le problème de Schturm-Liouville associé aux conditions aux bords données.

Etape 4 **Problème non homogène**

A cette étape on cherche à résoudre un problème de type

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = 0 & x \in]0, L[\\ \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = 0 & t \in [0, T] \\ \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.35)$$

On applique la **technique de variation des constantes de la série obtenue à l'étape précédente**.

Etape 5 **Finale**

On regroupe toutes les solutions pour formuler l'expression définitive de la solution du problème initial.

6.2 Exemples travaillés

Exemple 3.2. Résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) & x \in]0, 1[\\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Solution

Ici nous avons : $L = 1$, $a = 1$, **conditions aux limites sont mixtes et homogènes**. L'équation elle-même est homogène et ne nécessite pas d'application de principe de superposition. La résolution est donc réduite à la seule étape 3.

Etape 3

Séparation de variables.

Nous devons d'abord trouver la forme de série de Fourier pour la solution. Considérons ici pour l'instant le cas plus général d'intervalle $[0, L]$ pour la variable x .

On cherche des solutions séparées sous forme $u(x, t) = X(x)T(t)$. La substitution dans l'équation donne le même type d'équations pour $X(x)$ et $T(t)$ que dans le cours. Les conditions aux bords donnent :

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 \Rightarrow X'(L)T(t) = 0$$

On en déduit donc des conditions aux bords pour $X(x)$: $X(0) = X'(L) = 0$.

On obtient ainsi le problème pour les variables séparées :

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda a T(t) & = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) & = 0 \\ X(0) = X'(L) & = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

La première des deux équations (3.15) admet une solution pour toutes les valeurs réelles du paramètre λ . Ces solutions sont de la forme :

$$T(t) = C e^{-a\lambda \cdot t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (3.38)$$

Ainsi il nous reste à trouver les couples (λ, X) , solutions du problème

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) & = 0 \\ X(0) = X'(L) & = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Il s'agit ici d'un cas particulier de problème de Sturm-Liouville. La solution générale de l'équation différentielle est donnée par

– Si $\lambda > 0$

$$S = \{A \sin(x\sqrt{\lambda}) + B \cos(x\sqrt{\lambda}) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

– Si $\lambda = 0$

$$S = \{Ax + B \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

– Si $\lambda < 0$

$$S = \{A \exp(x\sqrt{-\lambda}) + B \exp(-x\sqrt{-\lambda}) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On détermine ensuite les constantes A et B à partir des conditions aux bords spécifiées. Si $\lambda > 0$

$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

et

$$X'(L) = 0 \Rightarrow A\sqrt{\lambda} \cos(L\sqrt{\lambda}) = 0, \quad A \neq 0 \Rightarrow \cos(L\sqrt{\lambda}) = 0$$

Cette condition est satisfaite si et seulement si $L\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Nous obtenons ainsi une condition pour le paramètre λ . Le problème (3.39) admet une solution si et seulement si le paramètre λ prend l'une des valeurs

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

Si $\lambda = 0$ et si $\lambda < 0$ on montre comme dans le cours que le problème (3.39) n'admet pas de solutions non triviales. Ainsi nous obtenons une suite de solutions séparées de la forme

$$u_n(x, t) = Ae^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Recherche de solution sous forme de série.

Les théorèmes sur les problèmes de Sturm-Liouville en général (voir le cours) nous garantissent la complétude de la famille de fonctions propres $X_n(x)$. Donc nous pouvons rechercher des solutions du problème (A.1) sous forme de série

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-a\lambda_n t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$$

où C_n sont les coefficients de décomposition en série de Fourier de la condition initiale $g(x)$ selon la famille des fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (3.39) :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$$

Application.

Dans notre cas $L = 1$, $a = 1$. La solution recherchée est donc de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

où les coefficients C_n peuvent être identifiés à partir de la fonction $g(x)$:

$$g(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

On en déduit que $C_0 = 3$, $C_1 = 5$ et que $C_n = 0$, $\forall n > 1$. D'où :

$$u(x, t) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) e^{-\frac{\pi^2}{4}t} + 5 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) e^{-\frac{9\pi^2}{4}t}$$

7 Principe de maximum. Unicité des solutions.

Dans cette section nous allons étudier la question d'existence et unicité de solutions d'un problème aux limites.

Lemme 3.3. *Supposons que la fonction $w(x, t)$ vérifie l'inégalité différentielle suivante :*

$$w_t - aw_{xx} < 0, \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \quad (3.40)$$

où $a \geq 0$.

Alors $w(x, t)$ n'admet pas de maximum local dans $(x, t) \in]0, L[\times]0, T]$.

Preuve de Lemme 3.3

Supposons qu'il existe un point de maximum local $(x_0, t_0) \in]0, L[\times]0, T]$. Comme la fonction $w(x, t_0)$ admet un maximum local en x_0 , on a $w_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Comme la fonction $w(x_0, t)$ admet un maximum local au point $t_0 \in]0, T]$ on a $w_t(x_0, t_0) \geq 0$ (l'inégalité stricte peut avoir lieu si $t_0 = T$). Donc au point (x_0, t_0) on a : $w_t(x_0, t_0) - aw_{xx}(x_0, t_0) \geq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse 3.40). **C.Q.F.D**

Théorème 3.4 (Principe de maximum). *Soit $a \geq 0$. Supposons que $u(x, t)$ est solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} \leq 0 & (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \\ u(x, 0) \leq 0 & x \in [0, L] \\ u(0, t) \leq 0, \quad u(L, t) \leq 0, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.41)$$

Alors $u(x, t) \leq 0$ pour tout point $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.

Corollaire 3.1. *Soit $a \geq 0$. Supposons que $u(x, t)$ est une solution du problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} & (x, t) \in]0, L[\times]0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ u(0, t) = \varphi(t) & t \in [0, T] \\ u(L, t) = \psi(t) & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.42)$$

Notons

$$M = \max\left\{ \max_{0 \leq x \leq L} g(x), \max_{0 \leq t \leq T} \varphi(t), \max_{0 \leq t \leq T} \psi(t) \right\}$$

et

$$m = \min\left\{ \min_{0 \leq x \leq L} g(x), \min_{0 \leq t \leq T} \varphi(t), \min_{0 \leq t \leq T} \psi(t) \right\}$$

Alors

$$m \leq u(x, t) \leq M, \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times [0, T]$$

Corollaire 3.2. Soit $a \geq 0$. Supposons que $u(x, t)$ est solution du problème

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ u(0, t) = \varphi(t) \\ u(L, t) = \psi(t) \end{cases} \quad (3.43)$$

Notons

$$M = \max\left\{ \max_{0 \leq x \leq L} |g(x)|, \max_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t)|, \max_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)| \right\}$$

et

$$N = \sup_{]0, L[\times]0, T[} |f(x, t)|$$

Alors

$$|u(x, t)| \leq M + NT, \quad \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, T[$$

Théorème 3.5 (Unicité de solution d'un problème aux conditions initiales et aux limites). Soient $a \geq 0$ et $f(x, t), g(x), \varphi(t), \psi(t)$ fonctions continues dans leurs domaines de définition respectifs. Alors il ne peut y avoir qu'une seule solution du problème aux conditions initiales et aux limites (3.43).

8 Fonction de Green

8.1 Cas de problème homogène.

Nous avons montré dans les sections précédentes que la solution d'un problème homogène de type (3.12)-(3.13)-(3.14) s'écrit sous forme de série :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

où

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) dy$$

En substituant les expressions intégrales des coefficients C_n dans la série on obtient :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) dy \right) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

La convergence uniforme de toutes les séries concernées (que l'on admet ici sans démonstration) autorise de permuter la sommation et l'intégration :

$$u(x, t) = \int_0^L g(y) \frac{2}{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} y) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \right) dy$$

Définition 3.2 (Fonction de Green). On appelle fonction de Green pour le problème initial et au limites sur $[0, L] \times]0, T]$ la fonction définie par la série

$$G(x, y, t) = \frac{2}{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} y) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \right) \quad (3.44)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.6. Si $g(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$ alors le problème (3.12)-(3.13)-(3.14) admet une unique solution définie par l'intégrale

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) g(y) dy$$

où $G(x, y, t)$ est la fonction de Green définie par (3.44).

8.2 Cas de problème non homogène.

Nous avons montré dans les sections précédentes que la solution d'un problème non homogène de type (3.23)-(3.24)-(3.25) s'écrit sous forme de série :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

où

$$\alpha_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \int_0^t f(y, \tau) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) e^{a\lambda_n \tau} d\tau dy$$

En substituant les expressions intégrales des coefficients $\alpha_n(t)$ dans la série on obtient :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \int_0^t f(y, \tau) \sin(\sqrt{\lambda_n} y) e^{a\lambda_n \tau} d\tau dy \right) e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

La convergence uniforme de toutes les séries concernées (que l'on admet ici sans démonstration) autorise de permuter la sommation et l'intégration :

$$u(x, t) = \int_0^L \int_0^t f(y, \tau) \frac{2}{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\lambda_n(t-\tau)} \sin(\sqrt{\lambda_n}y) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \right) dyd\tau$$

On reconnaît alors dans la série qui apparaît la fonction de Green.
Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.7. *Supposons que $f(x, t)$ est une fonction continue sur $[0, L] \times [0, T]$, de classe C^2 selon la variable x sur $[0, L]$ et telle que $f(0, t) = f(L, t) = 0$. Alors le problème (3.23)-(3.24)-(3.25) admet une unique solution définie par l'intégrale*

$$u(x, t) = \int_0^L \int_0^t G(x, y, t - \tau) f(y, \tau) dyd\tau$$

où $G(x, y, t)$ est la fonction de Green définie par (3.44).

8.3 Propriétés de la fonction de Green

La proposition suivante énonce un certain nombre de propriétés de la fonction de Green

Lemme 3.4 (Propriétés de la fonction de Green). *Soit*

$$G(x, y, t) = \frac{2}{L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n}y) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \right)$$

la fonction de Green du problème (3.12)-(3.13)-(3.14).

Alors

(i) La fonction $G(x, y, t)$ vérifie l'équation de la chaleur (3.12) selon les variables (x, t) et (y, t) :

$$G_t(x, y, t) = aG_{xx}(x, y, t) = aG_{yy}(x, y, t), \quad (x, y, t) \in [0, L] \times [0, L] \times [0, T] \quad (3.45)$$

(ii) La fonction $G(x, y, t)$ vérifie les conditions aux limites (3.14) selon la variable x

$$G(0, y, t) = G(L, y, t) = 0, \quad (y, t) \in [0, L] \times [0, T] \quad (3.46)$$

(iii) La fonction $G(x, y, t)$ est symétrique par rapport aux variables (x, y) :

$$G(x, y, t) = G(y, x, t), \quad (x, y, t) \in [0, L] \times [0, L] \times [0, T] \quad (3.47)$$

(iv) Pour toute fonction continue $g(x)$ on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0^+} \int_0^L G(x, y, t) g(y) dy = g(x_0), \quad \forall x_0 \in [0, L] \quad (3.48)$$

8.4 Problème aux limites homogènes

Des théorèmes 3.6 et 3.7 on déduit :

Théorème 3.8. *Supposons que*

1. $f(x, t)$ est une fonction continue sur $[0, L] \times [0, T]$, de classe C^2 selon la variable x sur $[0, L]$ et telle que $f(0, t) = f(L, t) = 0$
2. $g(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$

Alors le problème (3.31) admet une unique solution définie par

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, y, t)g(y)dy + \int_0^L \int_0^t G(x, y, t - \tau)f(y, \tau)dyd\tau$$

8.5 Problème aux conditions initiales et aux limites

La fonction de Green permet également d'exprimer sous forme intégrale la solution du problème général aux conditions initiale et aux limites que nous rappelons ici

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ u(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[\\ u(0, t) = \varphi(t) & t \in [0, T] \\ u(L, t) = \psi(t) & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.49)$$

Théorème 3.9. *Supposons que*

1. $f(x, t)$ est une fonction continue sur $[0, L] \times [0, T]$, de classe C^2 selon la variable x sur $[0, L]$ et telle que $f(0, t) = f(L, t) = 0$
2. $g(x)$ est une fonction de classe C^2 sur $[0, L]$ telle que $g(0) = g(L) = 0$
3. $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont continues

Alors le problème 3.49 admet une unique solution définie par

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^L G(x, y, t)g(y)dy + \int_0^L \int_0^t G(x, y, t - \tau)f(y, \tau)dyd\tau \\ &+ a \int_0^t G_y(x, 0, t - \tau)\varphi(\tau)d\tau - a \int_0^t G_y(x, L, t - \tau)\psi(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Chapitre 4

Problèmes paraboliques sur un axe ou un demi-axe infini. Dimension spatiale 1

1 Position de problème

Nous allons considérer ici le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

Définition 4.1. On appelle solution classique du problème de Cauchy (4.1) toute fonction

$$u(x, t) \in \mathcal{C}_t^1([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_x^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$$

qui vérifie l'équation et la condition initiale du (4.1).

Lemme 4.1 (Principe de superposition). *La solution du problème (4.1), si elle existe, peut être représentée sous la forme de somme :*

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

où $u_1(x, t)$ est la solution du problème de Cauchy associé à l'équation de chaleur homogène ($f(x, t) = 0$) avec des conditions initiales non nulles :

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2)$$

et où $u_2(x, t)$ est la solution du problème de Cauchy associé à l'équation de chaleur non homogène ($f(x, t) \neq 0$) avec des conditions initiales nulles :

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.3)$$

2 Résolution de problème homogène : méthode de transformée de Fourier

Nous allons chercher la solution $u(x, t)$ dans la classe des fonctions $\{u \in \mathcal{C}_t^1([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_x^2([0, \infty) \times \mathbb{R})\}$ t. q. $u \in L_x^2[0, \infty[$ et $u_x \in L_x^2[0, \infty[$.

Notons $U(\mu, t)$ sa transformée de Fourier par rapport à la variable spatiale x :

$$U(\mu, t) = \mathcal{F}_x \{u\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\mu x} dx$$

On peut vérifier facilement (voir le cours "Mathématiques pour l'ingénieur" de Marietta Manolessou pour les rappels sur les propriétés de la transformée de Fourier) que

$$\mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = -\mu^2 \mathcal{F}_x \{u\} = -\mu^2 U(\mu, t)$$

et que

$$\mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_x \{u\} = \frac{\partial}{\partial t} U(\mu, t)$$

Alors si $u(x, t)$ vérifie l'équation de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sa transformée de Fourier vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mu, t) = -\mu^2 a U(\mu, t)$$

avec comme condition initiale

$$U(\mu, 0) = \mathcal{F}_x \{u(x, 0)\} = \mathcal{F}_x \{g(x)\}$$

On remarque alors que pour chaque valeur fixée de $\mu \in \mathbb{R}$ $U(\mu, t)$ est une solution de problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(\mu, t) = -\mu^2 a U(\mu, t) \\ U(\mu, 0) = \mathcal{F}_x \{g(x)\} \end{cases}$$

On en déduit immédiatement (voir la résolution des EDO d'ordre 1 pour les détails) :

$$U(\mu, t) = e^{-\mu^2 a t} U(\mu, 0) = e^{-\mu^2 a t} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\mu x} dx$$

Alors la solution du problème de Cauchy (4.2) s'écrit :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\mu, t) e^{i\mu x} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\mu \xi} \cdot e^{i\mu x - a\mu^2 t} d\xi \quad (4.4)$$

3 Solution fondamentale

Changeons (formellement) l'ordre d'intégration dans (??) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(x-\xi)} \cdot e^{-a\mu^2 t} d\mu \right) d\xi$$

Définition 4.2 (Solution fondamentale). On appelle solution fondamentale du problème de Cauchy (4.2) la fonction $G(x, t)$ définie par

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \cdot e^{-a\mu^2 t} d\mu$$

Alors la solution du problème de Cauchy (4.2) s'écrit sous la forme de convolution :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) G(x - \xi, t) d\xi$$

Calculons la solution fondamentale $G(x, t)$ pour $t > 0$

Lemme 4.2. *Soit*

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \cdot e^{-a\mu^2 t} d\mu$$

Alors

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

Preuve de Lemme 4.2

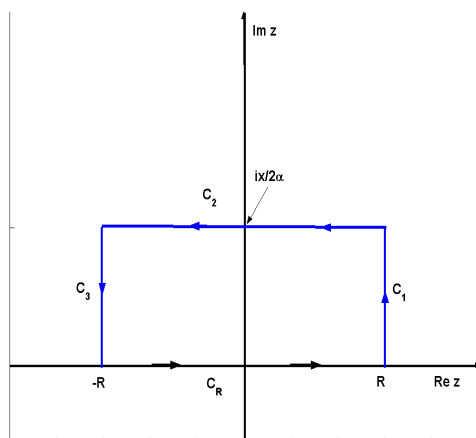


FIGURE 4.1 – Contour d'intégration

$$\begin{aligned}
 G(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu x - a\mu^2 t) d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-at \left\{ \mu^2 - 2\mu \frac{ix}{2at} - \frac{x^2}{4a^2 t^2} \right\} - \frac{x^2}{4at}\right) d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4at}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-at \left(\mu - \frac{ix}{2at}\right)^2\right) d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha}\right)^2} d\mu
 \end{aligned}$$

où on a noté $\alpha = at$. La dernière intégrale peut être évaluée à l'aide de la théorie des résidus. On utilisera le contour L représenté sur la figure (??). le théorème des résidus, appliqué à ce contour donne :

$$\int_L e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha}\right)^2} d\mu = 0$$

Donc

$$\int_{-R}^R e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha}\right)^2} d\mu = - \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \right) e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha}\right)^2} d\mu$$

$$\int_{C_1} e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} d\mu = \left| \begin{array}{l} \mu = R + i\tau \\ d\mu = id\tau \end{array} \right| \quad (4.5)$$

$$= i \int_0^{x/2\alpha} e^{-\alpha \left(R + i \left(\tau - \frac{x}{2\alpha} \right) \right)^2} d\tau \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

Alors

$$\left| \int_{C_1} e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} d\mu \right| \leq \int_0^{x/2\alpha} e^{-\alpha R^2} d\tau = e^{-\alpha R^2} \left| \frac{x}{2\alpha} \right| \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$$

De façon analogue on montre que

$$\left| \int_{C_3} e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} d\mu \right| \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$$

Considérons

$$\int_{C_2} e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} d\mu = \left| \begin{array}{l} \mu = \tau + \frac{ix}{2\alpha} \\ d\mu = d\tau \end{array} \right| \quad (4.8)$$

$$= - \int_{-R}^R e^{-\alpha \tau^2} d\tau \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

Donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} d\mu = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} e^{-\alpha \left(\mu - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

On en déduit que

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

C.Q.F.D

Remarque 4.1. Dans le cas de dimension de l'espace $d \geq 1$ on a :

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}$$

Tous les raisonnements que nous avons faits ici ne sont valides que si les intégrales de Fourier et les convolutions impliquées convergent uniformément. Nous admettrons ici sans démonstration le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Si la fonction $g(x)$ est continue et bornée dans \mathbb{R} alors le problème (4.2) admet une unique solution dans la classe des fonctions bornées sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Cette solution peut être représentée sous la forme :*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - \xi, t) g(\xi) d\xi \quad (4.11)$$

où

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}$$

La solution obtenue avec (4.11) est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

L'utilisation de la solution fondamentale pour exprimer la solution du problème Cauchy reste valable même si la condition initiale admet un nombre fini de discontinuités :

Proposition 4.1. *Si la condition initiale $g(x)$ admet un nombre fini de discontinuités, alors la fonction définie par (4.11) est solution du problème de Cauchy et est continue partout sauf dans les points où $g(x)$ est discontinue.*

4 Résolution de problème non homogène

Théorème 4.2. *Si la fonction $f(x, t)$ est continûment dérivable et bornée dans $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ alors le problème (4.3) admet une unique solution dans la classe des fonctions bornées sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Cette solution peut être représentée sous la forme :*

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

où

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}$$

5 Unicité de solutions du problème de Cauchy.

Théorème 4.3. *Dans la classe des fonctions bornées sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ le problème (4.1) ne peut avoir plus d'une solution classique.*

6 Problèmes de Cauchy sur un demi-axe

Soit le problème suivant :

Nous allons considérer ici le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Ce problème peut être résolu en utilisant la transformé de Fourier en sinus, en suivant la même méthode que dans les sections ci-dessus. Nous allons présenter ici une autre approche qui fait appel à la solution fondamentale que nous venons de découvrir.

Soit en effet le problème de Cauchy sur l'axe

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.13)$$

dont la condition initiale est le prolongement impair de la fonction $g(x)$:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \geq 0 \\ -g(-x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En utilisant la proposition 4.1 on écrit la solution du problème (4.13) :

où

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}$$

$$U(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - \xi, t) \tilde{g}(\xi) d\xi = \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4at}} g(\xi) d\xi - \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4at}} g(-\xi) d\xi \quad (4.15)$$

En faisant un changement de variables dans la dernière intégrale $\xi' = -\xi$ on obtient :

$$U(x, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4at}} - e^{-\frac{|x + \xi|^2}{4at}} \right) g(\xi) d\xi$$

On remarque alors que la fonction $U(x, t)$ est solution de l'équation de chaleur sur le demi-axe $x > 0$, vérifie la condition initiale $U(x, 0) = g(x)$, $x > 0$ et pour $x = 0$ on a

$$U(0, t) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{|-\xi|^2}{4at}} - e^{-\frac{|\xi|^2}{4at}} \right) g(\xi) d\xi = 0$$

Ainsi, la fonction $U(x, t)$ pour $x > 0$ est solution du problème (4.12).

On en déduit alors que la fonction de Green pour le problème (4.12) s'écrit :

$$G_+(x, y, t) = e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4at}}$$

La solution s'écrit alors comme intégrale

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} G_+(x, y, t) g(y) dy$$

Chapitre 5

Equations hyperboliques

1 Exemple de modélisation : vibration d'une corde

Considérons les vibrations d'une corde de longueur l fixée aux deux extrémités. Une corde signifie un corps rigide dont toutes les dimensions sont négligeables devant sa longueur. Nous supposons également que la résistance de la corde aux forces de flexion est négligeable devant la tension qu'elle subit. Autrement dit, dans ce modèle nous allons prendre en compte uniquement la tension subie par la corde.

Pour simplifier les considérations, nous allons supposer que la corde vibre dans un plan, auquel nous associons un système de coordonnées cartésiennes de telle sorte que l'axe des abscisses coïncide avec la corde et l'origine avec son extrémité gauche. Dans ce cas, tout point de la corde est représenté par une valeur de coordonnée $x \in [0, l]$. Le mouvement de la corde sera alors représenté par une fonction $u(x, t)$ donnant à chaque moment de temps t la position de chaque point de la corde x le long de l'axe vertical y . Pour une valeur de temps t fixée le graphe de la fonction $u(x, t)$ représente le profil de la corde.

Enfin, nous supposons que les déformations de longueur dues aux vibrations sont négligeables, c'est à dire, la longueur de la corde reste constante, égale à l . Ceci revient à supposer que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \ll 1$$

Comme les forces de flexion sont négligeables dans notre modèle, la force de tension $T(x)$ en un point x de la corde est dirigée le long de la tangente à la courbe de $u(x, t)$ au point x (voir figure (5.1)).

Considérons maintenant la balance des forces appliquées sur un petit intervalle de la corde $[x, x + \Delta x]$. Rappelons que tous les points de la corde effectuent des mouvements le long de l'axe vertical OY . Donc, selon la figure (5.1), les projections des forces de tension sur l'axe OX donnent :

$$T(x + \Delta x) \cos(\beta) - T(x) \cos(\alpha) = 0$$

Remarquons que

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \ll 1 \Leftrightarrow \cos(\alpha) \simeq 1$$

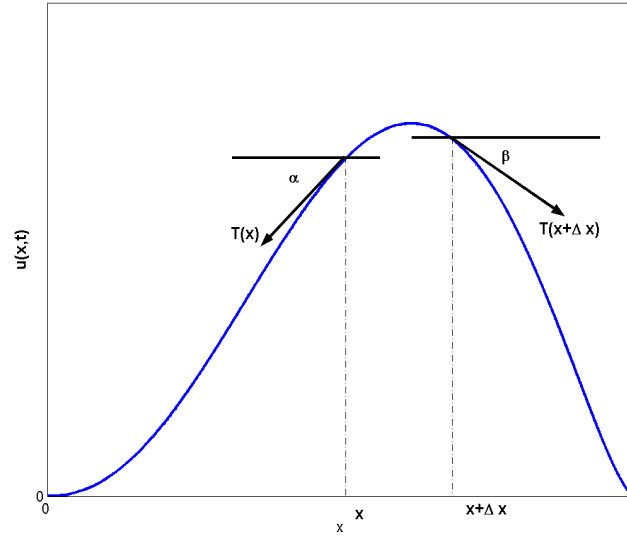


FIGURE 5.1 – Profil de corde à un moment de temps fixé

et

$$\tan(\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \ll 1 \Leftrightarrow \cos(\beta) \simeq 1$$

Il s'ensuit que

$$T(x + \Delta x) - T(x) = 0 \Leftrightarrow T(x) = T(x + \Delta x) = T$$

Alors, l'une des conséquences de l'hypothèse de longueur constante est que la tension subie par la corde est constante. Elle sera notée T dans la suite.

Considérons maintenant la projection des forces sur l'axe des ordonnées. Si $u(x, t)$ définit la position verticale de chaque point x de la corde alors $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ est l'accélération du mouvement de ce point le long de l'axe OY . Calculons la masse de l'intervalle $[x, x + \Delta x]$. Soit ρ la densité linéaire de la corde. Alors la masse d'un intervalle de longueur Δx est égale à $\rho \Delta x$. L'équilibre des forces le long de l'axe OY s'écrit alors :

$$T \sin(\beta) - T \sin(\alpha) = \rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(x, t)$$

D'après nos hypothèses, $\cos(\alpha) \simeq 1$ et $\cos(\beta) \simeq 1$. Alors $\sin(\beta) \simeq \tan(\beta)$ et $\sin(\alpha) \simeq \tan(\alpha)$ et on obtient :

$$T \tan(\beta) - T \tan(\alpha) = \rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(x, t)$$

ce qui équivaut à

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) = \rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(x, t)$$

Après division par $\rho \cdot \Delta x$ on trouve :

$$\frac{T}{\rho} \frac{u_x(x, t) - u_x(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = u_{tt}(x, t)$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ on obtient l'équation de vibrations de la corde :

$$u_{tt}(x, t) = \frac{T}{\rho} u_{xx}(x, t)$$

Cette équation représente la forme canonique des équations hyperboliques. Nous allons dans ce chapitre décrire les différents problèmes associés à cette équation et discuter des méthodes de résolution exacte.

Considérons, par exemple, le problème de vibration d'une corde de longueur l . La fonction $u(x, t)$ qui représente la position de chaque point $0 \leq x \leq l$ de la corde doit être solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in]0, l[, \quad t \in]0, T[$$

Si les deux extrémités de la corde sont fixées nous devons rechercher la solution $u(x)$ telle que

$$u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

Si les deux extrémités sont en mouvement, nous devons indiquer les lois respectives :

$$u(x = 0, t) = f_1(t); \quad u(x = l, t) = f_2(t)$$

Mais la connaissance des comportements des deux extrémités de la corde ne suffit pas pour déterminer de façon unique la solution. Nous devons également savoir la position et la vitesse de chaque point de la corde au moment de temps initial ($t = 0$). Pour cela on pose des conditions initiales :

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

2 Problèmes aux limites

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = au_{xx}, & (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}_+^* \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x) = \psi(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour trouver la solution nous allons appliquer la méthode de séparation des variables, par analogie avec le cas d'équations paraboliques vu en détails dans les chapitres précédents.

On cherche donc des solutions séparées de la forme

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

La substitution dans l'équation d'onde donne :

$$T''X = aTX''$$

et en divisant par XT on a

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{T''}{T} = -\lambda$$

où λ est la constante de séparation. Cette dernière égalité équivaut les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

On déduit aussi des conditions aux bords que $X(0) = X(L) = 0$. Commençons donc par chercher les couples (λ, X) , solutions du problème

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Il s'agit ici d'un cas particulier de problème de Sturm-Liouville, étudié dans la section 2 du chapitre 2.

D'après la proposition 1.1, le problème (3.17) admet une infinité de solutions $\{(\lambda_n, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (5.3)$$

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (5.4)$$

L'équation $T'' + \lambda_n T = 0$ admet alors des solutions de la forme

$$T_n(t) = A_n \cos(\sqrt{a\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{a\lambda_n} t)$$

Ainsi on montre que l'équation d'onde admet une infinité de solutions séparées de la forme :

$$u_n(x, t) = (A_n \cos(\sqrt{a\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{a\lambda_n} t)) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Toutes ces solutions vérifient les conditions aux limites. On remarque cependant qu'aucune des solutions séparées ne vérifie les conditions initiales du problème. Nous allons alors rechercher une solution sous forme de série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\sqrt{a\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{a\lambda_n} t)) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (5.5)$$

Pour qu'une telle fonction $u(x, t)$ puisse être substituée dans l'équation différentielle (5.1) il est nécessaire de justifier que $u(x, t) \in C_t^1([0, L] \times [0, T]) \cap C_x^2([0, L] \times [0, T])$. Il suffit pour cela de prouver que la série elle-même ainsi que les séries obtenues par dérivées "terme par terme" convergent uniformément. Bien sûr, cela dépend du choix des coefficients A_n et B_n . Nous allons ici justifier formellement le choix de ces coefficients en admettant sans démonstration la convergence uniforme des séries nécessaires.

Supposons donc que les suites de coefficients $A_n, B_n, n \in \mathbb{N}^*$ est telle que la série (5.5) ainsi que ses dérivées "terme par terme" convergent uniformément. Alors la substitution formelle de $u(x, t)$ dans l'équation d'onde permet de montrer facilement que $u(x, t)$ vérifie cette équation. En effet, tous les éléments de la somme dans (5.5) sont solutions de l'équation différentielle. On

obtient donc au final une série nulle. Les conditions aux limites sont également vérifiées, grâce à la définition des fonctions $X_n(x)$. Il reste donc à vérifier les conditions initiales :

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Il s'ensuit que les coefficients A_n doivent être les coefficients de Fourier de la fonction $\phi(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx \quad (5.6)$$

En dérivant la série 5.5 une fois par rapport à t et en posant ensuite $t = 0$ on a

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Il s'ensuit que les quantités $B_n a \frac{n\pi}{L}$ doivent être les coefficients de Fourier de la fonction $\psi(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$. On obtient alors les expressions pour le calcul des coefficients B_n :

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n}x) dx \quad (5.7)$$

3 Problème de Cauchy pour l'équation d'onde sur l'axe réel.

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x); & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (5.8)$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter la méthode de D'Alembert de résolution de ce problème.

Tout d'abord, faisons un changement de variables qui permet de réduire l'équation d'onde à sa seconde forme canonique :

$$\begin{cases} \xi &= x + at \\ \eta &= x - at \end{cases} \quad (5.9)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \left[-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

De façon analogue on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)$$

Après la substitution dans l'équation (5.8) et simplification on aboutit à la seconde forme canonique de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (5.10)$$

Il est très facile de trouver la solution générale de cette dernière équation. En effet, écrivons la de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Cela signifie que la fonction $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ne dépend pas de ξ . Elle dépend donc uniquement de η :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1(\eta)$$

En intégrant cette équation et en notant $f(\eta)$ la primitive de $f_1(\eta)$ on obtient :

$$u(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$$

où $g(\xi)$ représente la constante de l'intégration.

En revenant aux variables d'origine selon le changement de variables (5.9) on trouve la solution générale de l'équation d'onde

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

où f et g sont deux fonctions d'une seule variable, continûment dérivables.

Pour trouver la solution du problème de Cauchy (5.8) on doit maintenant déterminer les fonctions f et g à partir des conditions initiales. Pour $t = 0$ on a

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \quad (5.11)$$

$$u_t(x, 0) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) \quad (5.12)$$

En intégrant l'équation (5.12) on trouve

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + f(0) - g(0) \quad (5.13)$$

On déduit alors des équations (5.13) et (5.11) que

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{1}{2} (f(0) - g(0))$$

et

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s)ds - \frac{1}{2}(f(0) - g(0))$$

En substituant les deux dernières expressions dans la formule de la solution générale de l'équation des vibrations on trouve la solution du problème de Cauchy (5.8)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \quad (5.14)$$

La formule (5.14) s'appelle la formule de D'Alembert.

3.1 Interprétation physique de la formule de D'Alembert

D'après la formule de D'Alembert la position de tout point x d'une corde infinie en vibration au moment de temps t est donnée par la fonction $u(x, t)$ qui se présente sous la forme

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

Remarquons que cette fonction est une superposition de deux ondes. La première, $f(x + at)$ se propage à vitesse constante a vers la gauche. Son profil reste constant et égal au graphe de la fonction f . La seconde, $g(x - at)$, se propage vers la droite avec la même vitesse a et son profil est celui du graphe de la fonction g .

Pour représenter ce phénomène il est utile d'utiliser le plan des phases, c'est à dire, le plan (x, t) .

Définition 5.1. Dans le plan des phases, on définit deux familles de droites : $\mathcal{F} = \{x + at = C, C \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{G} = \{x - at = C, C \in \mathbb{R}\}$. Ces deux familles s'appellent familles de caractéristiques du problème (5.8).

Remarquons que la fonction $f(x + at)$ est constante sur toute caractéristique de la famille de droites \mathcal{F} et que la fonction G est constante sur toute droite de la famille \mathcal{G} .

Supposons que nous voulons connaître la solution du problème (5.8) dans un point $M(x_0, t_0)$ du plan des phases. D'après la formule de D'Alembert (5.14), cette solution est uniquement définie par les valeurs de la fonction φ aux points $x_0 - at_0$ et $x_0 + at_0$ et par le comportement de la fonction $\psi(x)$ entre ces deux points. Remarquons que les deux caractéristiques qui passent par le point M croisent l'axe des abscisses aux points $P(x_0 - at_0)$ et $Q(x_0 + at_0)$. Le triangle PMQ s'appelle zone de dépendance pour le point M (voir la figure (5.2)). En effet, les conditions initiales en dehors de l'intervalle PQ n'ont aucune influence sur la solution au point M .

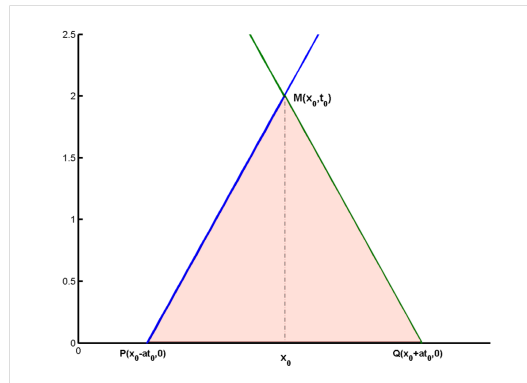


FIGURE 5.2 – Triangle de dépendance pour le point M

Exemple 5.1. Considérons un problème de Cauchy de type (5.8) dans lequel la fonction $\psi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et la fonction $\varphi(x)$ a pour support un intervalle $[\alpha, \beta]$. Cela signifie que $\varphi(x) = 0, \text{ si } x \notin [\alpha, \beta]$.

Alors, d'après la formule de D'Alembert (5.14), la solution du problème pour un point (x, t) du plan de phases s'écrit :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at))$$

Su la figure (5.3) on peut observer le graphe de la solution dans \mathbb{R}^3 . On remarque nettement deux ondes qui se propagent à partir de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, l'une vers la gauche et l'autre vers la droite. Leur propagation forme deux bandes dans le plan des phases (voir (5.4)). En dehors de ces deux bandes la solution est nulle.

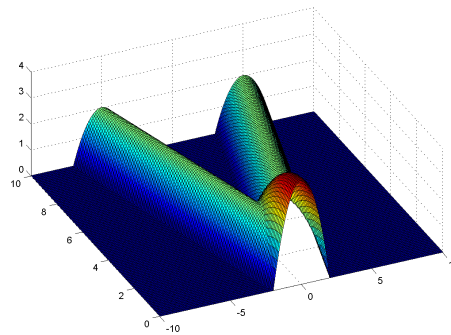


FIGURE 5.3 – Une solution particulière : vitesse initiale nulle

Ces deux bandes sont formées par deux couples de caractéristiques tracés à partir des

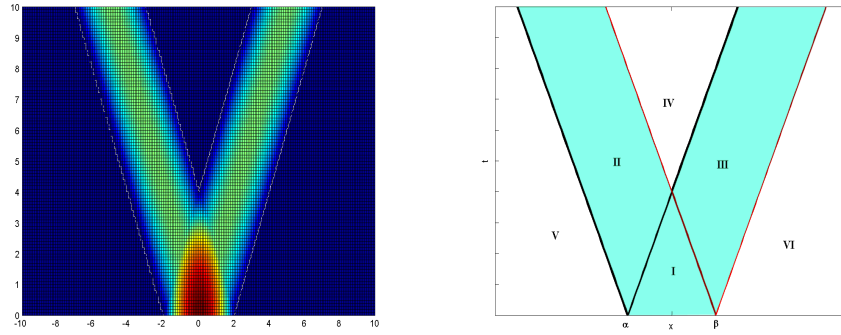


FIGURE 5.4 – Zones d'influence d'un intervalle

extrémités de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ comme on le voit sur la figure (5.4).

Dans les zones **IV**, **V**, **VI** la solution est nulle. En effet, si on construit le triangle de dépendance pour un point choisi dans une de ces zones, les deux extrémités de sa base se trouveront en dehors de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, là où $\varphi(x)$ est nulle. Pour les points choisis dans les zones **II** et **III** seule une extrémité (P pour la zone **III** et Q pour la zone **II**) se trouvera dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Donc la solution dans chacune de ces zones est une onde qui se propage vers la gauche (zone **II**) ou la droite (zone **III**). Enfin, dans la zone **I** seulement la solution est une superposition des deux ondes. Cette analyse se confirme sur le graphe de la solution, figure (5.3).

Les zones **I**, **II** et **III** s'appellent zones d'influence de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

4 Vibrations d'une corde fixée aux extrémités. Solution par la méthode de Fourier.

Nous allons ici résoudre le problème de vibrations d'une corde de longueur l . Ce modèle a été construit dans le chapitre . Voici le problème complet tel que nous allons le considérer :

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, 0 < x < l \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t > 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Nous allons appliquer le raisonnement de séparation de variables pour résoudre l'équation d'onde. Cherchons la solution sous la forme :

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

En la substituant dans l'équation on obtient :

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$$

En divisant par $a^2 X(x)T(t)$ on a

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

dans la partie gauche de l'égalité ci-dessus nous avons une fonction de t et dans la partie droite une fonction de x . On en déduit que les deux fonctions sont constantes, égale à une valeur $-\lambda$.

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (5.16)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (5.17)$$

Remarque 5.1. Notons que nous recherchons maintenant des triplets $(\lambda, X(x), T(t))$. Car, le raisonnement de séparation des variables introduit un nouveau paramètre dans le problème : la constante λ , que nous ne connaissons pas. Une fois que la séparation des variables est faite, le problème se formule ainsi : **trouver la(les) valeur(s) de λ pour la(les)quelles les deux équations (5.16) et (5.17) admettent simultanément des solutions non triviales.**

Nous allons d'abord trouver les solutions possibles (λ et $X(x)$) de l'équation (5.17). Ensuite, pour les valeurs de λ retenues, nous allons résoudre l'équation (5.16).

Analysons les conditions aux bords associés au problème (5.15) :

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \Leftrightarrow X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \forall t > 0$$

Le choix $T(t) = 0$ correspond à une solution triviale de l'équation d'onde $u(x, t) = 0$. Si on cherche des solutions non triviales, la condition aux bords es vérifiée si et seulement si $X(0) = X(l) = 0$. Alors, la fonction $X(x)$ doit être solution du problème

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

C'est un problème de Sturm-Liouville. Nous l'avons étudié en détails dans le chapitre 1. Nous avons établi (voir proposition 1.1 que ce problème admet une infinité de solutions

$$(\lambda_k, X_k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \quad \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il nous reste maintenant à résoudre (si c'est possible) l'équation (5.16) avec $\lambda = \lambda_k$

$$T''(t) + \lambda_k a^2 T(t) = 0$$

De façon complètement analogue à la première équation on trouve les solutions

$$T_k(t) = A_k \cos(a\sqrt{\lambda_k}t) + B_k \sin(a\sqrt{\lambda_k}t) = A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{l}t\right)$$

Ainsi, la méthode de séparation de variables nous a permis d'établir que l'équation d'onde du problème (5.15) admet une infinité de solutions de la forme

$$u_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) \right)$$

4. VIBRATIONS D'UNE CORDE FIXÉE AUX EXTRÉMITÉS. SOLUTION PAR LA MÉTHODE DE FOURIER

et que toutes ces solutions vérifient les conditions aux bords :

$$u_k(0, t) = u_k(l, t) = 0$$

Nous allons alors chercher une solution du problème (5.15) sous forme de combinaison linéaire de toutes ces solutions particulières :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) \right) \quad (5.19)$$

par application de principe de superposition généralisé (aux sommes infinies) une solution d'une telle forme vérifie l'équation différentielle d'onde et les conditions aux bords. Il reste donc à choisir les coefficients A_k et B_k de telle sorte que les deux conditions initiales soient vérifiées :

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = \varphi(x) \quad (5.20)$$

et

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak\pi}{l} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = \psi(x) \quad (5.21)$$

On remarque que les séries impliquées dans les deux équations (5.20) et (5.21) sont des séries de Fourier. Et comme la décomposition en série de Fourier d'une fonction, si elle est possible, est unique, on déduit les coefficients A_k et B_k à partir des coefficients de Fourier des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ respectivement :

$$A_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \quad (5.22)$$

et

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_{-l}^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \quad (5.23)$$

Pour que tous les raisonnements que nous venons d'exposer soient valables il est nécessaire de démontrer la convergence uniforme de la série (5.19). Sans cela nous ne pouvons pas justifier toutes les opérations de dérivation que nous avons effectuées formellement. Nous admettons ici, sans démonstration, le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions continues sur $[0, l]$ alors la solution du problème de Cauchy (5.15) existe et est unique. Elle est donnée par la série de Fourier suivante :*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{l}t\right) \right)$$

où

$$A_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

et

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_{-l}^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

Chapitre 6

Equations elliptiques

Dans ce chapitre nous étudions la classe des équations elliptiques, représentée par les équations de Laplace et de Poisson. Il existe de nombreuses approches à la résolution de ces équations. Nous allons ici nous limiter à seule méthode de résolution à l'aide de fonctions de Green. C'est pourquoi nous allons d'abord énoncer un certain nombre de faits (les formules de Green, en particulier) qui permettent d'établir et de justifier cette méthode. Ensuite, nous nous attardons un peu sur les propriétés des fonctions harmoniques

1 Exemple de modélisation : état stationnaire dans le problème de propagation de chaleur

Nous avons montré dans le chapitre 5 que le flux thermique non stationnaire dans une barre de métal isolée est une solution de l'équation de chaleur :

$$u_t = u_{xx}$$

avec les conditions initiales et aux bords

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi(x) \\ u(0, t) = g_1, \quad u(l, t) = g_2 \end{cases}$$

On s'intéresse maintenant à la question suivante : est ce que le processus de diffusion de chaleur dans la barre admet un état stationnaire ? C'est-à-dire une distribution des températures u qui ne dépend pas de temps.

Si une telle distribution est possible alors $u(x)$ doit être solution de l'équation

$$\begin{aligned} 0 &= u_{xx} \\ u(0) &= u_0, \quad u(l) = u_1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Il s'agit de l'équation de Laplace en dimension 1. Dans le cas de dimension spatiale quelconque d les états stationnaires du problème de diffusion de chaleur doivent être solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0$$

Retournons à l'équation (6.1). Puisqu'il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre 2 très simple nous pouvons obtenir facilement la solution du problème. En effet, l'équation différentielle admet une famille de solutions

$$u(x) = Ax + B$$

où les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux bords :

$$u(0) = B = u_0, \quad u(l) = Al + B = u_1$$

Ainsi la solution $u(x)$, l'état stationnaire de processus, existe est

$$u(x) = (u_1 - u_0)x + u_0$$

On remarque que ce résultat confirme l'observation faite lors de la modélisation de la propagation de chaleur : une distribution uniforme (3.1) finit par s'établir dans la barre.

2 Formules de Green et les fonctions harmoniques

2.1 Formule de Gauss-Ostrogradsky

Théorème 6.1. Formule de Gauss-Ostrogradsky. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine tel que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ (la fonction de paramétrisation de $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^2).

Soit $\vec{A}(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$ un champ vectoriel tel que $A(x) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$.

Alors

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{A}(x), \vec{n}(x)) d\sigma = \int_{\Omega} \text{div} \vec{A}(x) dx \quad (6.2)$$

où $\vec{n}(x)$ est la normale extérieure de la surface au point x et $\text{div} \vec{A}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(x)$

2.2 Formules de Green

Théorème 6.2. I ère formule de Green.

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine tel que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ (la fonction de paramétrisation de $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^2).

Soient $u_i \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ $v_i \in \mathcal{C}^2(\text{ob})$.

Alors

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) dx = - \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x)) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) d\sigma \quad (6.3)$$

où $\frac{\partial v}{\partial n}(x) = (\nabla v(x), \vec{n}(x))$

Preuve

On applique la formule (6.2) de Gauss-Ostrogradsky pour le champ $\vec{A}(x) = u(x)\nabla v(x)$ (les conditions du théorème 6.1 sont vérifiées).

Calculons

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}(x) &= \operatorname{div} (u(x)\nabla v(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right) = \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + u(x) \Delta v(x) \end{aligned}$$

Alors, d'après la formule (6.2), on a

$$\int_{\partial\Omega} \langle u\nabla v, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u(x)\nabla v(x)) dx = \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\Omega} \langle u(x), \Delta v(x) \rangle dx$$

Remarquons que (voir (??))

$$\langle u(x)\nabla v(x), \vec{n} \rangle = u(x) \langle \nabla v(x), \vec{n} \rangle = u(x) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x)$$

Alors

$$\int_{\Omega} \langle u(x), \Delta v(x) \rangle dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x) d\sigma$$

c.q.f.d.

Théorème 6.3. IIème formule de Green.

Soient $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Alors

$$\int_{\Omega} [v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)] dx = \int_{\partial\Omega} \left[v(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x) \right] d\sigma \quad (6.4)$$

Théorème 6.4. IIIème formule de Green (cas de dimension $n \geq 3$).

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Alors

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(y)}{|x-y|} d\sigma_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y \quad (6.5)$$

2.3 Fonctions harmoniques

Définition 6.1. Une fonction $u(x)$ s'appelle harmonique dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si $u(x) \in C^2(\Omega)$ et

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Définition 6.2. Une fonction harmonique $u(x)$ s'appelle régulière dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$

On note

$$Harm(\Omega)$$

l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques dans Ω .

Exemple 6.1. Soit $n = 3$. Montrons que la fonction

$$u(x) = \frac{1}{|x|}$$

est harmonique.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x_i}{|x|^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} + \frac{3x_i^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} = \frac{3x_i^2 - |x|^2}{|x|^5}$$

Alors

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{3|x|^2 - 3|x|^2}{|x|^5} = 0$$

Exemple 6.2. Soit $n = 2$. Montrons que la fonction

$$u(x) = \ln \frac{1}{|x|} = \ln \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

est harmonique dans \mathbb{R}^2 tout entier.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{x_i}{|x|^3} = -\frac{x_i}{|x|^2}, \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{|x|^2} + \frac{2x_i^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_i^2 - |x|^2}{|x|^4}$$

Alors

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{2|x|^2 - 2|x|^2}{|x|^4} = 0$$

2.3.1 Théorèmes de valeur moyenne

Proposition 6.1. Soit $u(x) \in \text{Harm}(\Omega)$. Alors

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma_x = 0$$

Preuve de ??

ons dans la deuxième formule de Green (6.4) $v(x) = 1$. On a alors $\Delta v(x) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n}(x) = 0$ et donc

$$0 = \int_{\partial\Omega} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma_x$$

C.q.f.d. **C.Q.F.D**

Théorème 6.5. Soit une fonction harmonique $u(x) \in \text{Harm}(\Omega)$.

Alors la valeur moyenne de u sur toute sphère entièrement contenue dans Ω est égale à la valeur de u au centre de la sphère.

$\forall S_\rho(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S_\rho(x)} u(y) d\sigma_y$$

Théorème 6.6. Soit une fonction harmonique $u(x) \in \text{Harm}(\Omega)$.

Alors la valeur moyenne de u sur toute boule entièrement contenue dans Ω est égale à la valeur de u au centre de la sphère.

$\forall B_\rho(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{3}{4\pi\rho^3} \int_{B_\rho(x)} u(y) dy$$

2.3.2 Principe de maximum

Théorème 6.7. Soit une fonction harmonique régulière dans Ω .

Alors si $u(x)$ atteint son maximum (respectivement minimum) à l'intérieur de Ω $u(x) = \text{const.}$

Corollaire 6.1. Soit une fonction harmonique régulière dans Ω .

Si $\forall x \in \partial\Omega \quad u(x) \geq 0$

alors $\forall x \in \Omega \quad u(x) \geq 0$

Corollaire 6.2. Soit deux fonctions harmoniques régulières dans Ω $u_1(x)$ et $u_2(x)$ telles que

$\forall x \in \partial\Omega \quad u_1(x) \geq u_2(x)$

Alors $\forall x \in \Omega \quad u_1(x) \geq u_2(x)$

3 Les problèmes aux bords associés à l'équation de Poisson

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine. On appelle équation de Poisson sur Ω l'équation suivante

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{6.6}$$

On appelle l'équation de Laplace l'équation suivante

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega \tag{6.7}$$

Selon le type de conditions aux bords on définit trois problèmes liés à l'équation de Poisson :

Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ [u]_{x \in \partial\Omega} = g(x) \end{cases} \tag{6.8}$$

Problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= -f(x), \quad x \in \Omega \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{x \in \partial \Omega} &= \phi(x) \end{cases}$$

Problème mixte

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= -f(x), \quad x \in \Omega \\ \left[\alpha(x)u(x) + \beta(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right]_{x \in \partial \Omega} &= \phi(x) \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous considérons le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson.

Définition 6.3. On appelle solution classique du problème de Dirichlet (6.8) une fonction $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ qui vérifie l'équation et la condition aux bords.

Théorème 6.8. Si le problème de Dirichlet (6.8) admet une solution classique alors elle est unique.

4 Solution de problème de Dirichlet par la méthode de fonction de Green

4.1 Motivation et définitions

Nous allons utiliser la troisième formule de Green

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial n}(y)}{|x-y|} d\sigma_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y \quad (6.9)$$

Cette formule nous donnerait la solution du problème de Dirichlet (6.8) si on pouvait en exclure le terme

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial n}(y)}{|x-y|} d\sigma_y$$

qui contient la dérivée normale de $u(x)$. Nous aurons recours à un artifice ici. Soit $v(x)$ une fonction harmonique régulière. En appliquant la deuxième formule de Green aux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ et en tenant compte que $\Delta v(x) = 0$ on obtient :

$$0 = \int_{\Omega} v(y) \Delta u(y) - \int_{\partial \Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma_y + \int_{\partial \Omega} u(y) \frac{\partial v}{\partial n}(y) d\sigma_y$$

On divise la dernière égalité par 4π et on la soustrait de (6.9) :

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Delta u(y) \left[\frac{1}{|x-y|} + v(y) \right] dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \left[\frac{1}{|x-y|} + v(y) \right] d\sigma_y$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|x-y|} + v(y) \right] d\sigma_y$$

On choisit maintenant $v(y)$ de telle sorte que le terme contenant la dérivée normale de u s'annule. Pour cela on doit exiger de v que

$$\left[\frac{1}{|x-y|} + v(y) \right]_{y \in \Omega} = 0$$

Ainsi, si on arrive à choisir une fonction v harmonique qui vérifie cette condition, on peut trouver la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson dans Ω à l'aide de la formule :

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Delta u(y) \left[\frac{1}{|x-y|} + v(y) \right] dy$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{|x-y|} + v(y) \right] d\sigma_y$$

On remarque alors que cette dernière expression fait intervenir dans les intégrales la même fonction $\frac{1}{|x-y|} + v(y)$. C'est cette fonction que l'on appelle la fonction de Green. En voici la définition.

Définition 6.4. On appelle fonction de Green du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace dans le domaine Ω la fonction

$$G : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

1. $G(x, y)$ en tant que fonction de y est la solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta_y G(x, y) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in \Omega \setminus \{x\}$$

- 2.

$$G(x, y) = \frac{1}{|x-y|} + v(x, y)$$

où $v(x, y)$ est une fonction harmonique régulière de y pour tout $x \in \Omega$

- 3.

$$G(x, y) \Big|_{y \in \partial\Omega} = 0$$

Remarquons que la fonction de Green est entièrement définie par l'opérateur de Laplace et le domaine Ω . Elle ne dépend donc pas de la fonction $f(x)$ ni de la fonction $g(x)$ du problème

4. SOLUTION DE PROBLÈME DE DIRICHLET PAR LA MÉTHODE DE FONCTION DE GREEN 75

de Dirichlet. Ainsi la résolution de tout problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson dans un domaine Ω donné se ramène à la recherche de la fonction de Green pour ce même domaine. Cette dernière est elle-même solution de problème de Dirichlet particulier, à savoir

$$\begin{cases} \Delta_y v(x, y) &= 0, y \in \Omega \setminus \{x\} \\ v(x, y) \Big|_{y \in \partial\Omega} &= -\frac{1}{|x - y|} \end{cases}$$

Si la fonction de Green pour le domaine Ω est connue alors la solution de tout problème de Dirichlet (6.8) s'écrit :

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) d\sigma_y \quad (6.10)$$

Annexe A

Rappels sur les équations différentielles ordinaires

1 Généralités

1.1 Définitions et notations

Définition A.1. Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées.

On distingue deux grands groupes d'équations différentielles :

- si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable réelle alors l'équation

$$F \left(x, u(x), \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{(k)}u}{dx^k} \right) = 0$$

s'appelle **équation différentielle ordinaire** ;

- si $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de plusieurs variables réelles alors l'équation

$$F \left(\vec{x}, u(\vec{x}), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{(l)}u}{\partial x_{i_1}^{l_1} \dots \partial x_{i_k}^{l_k}}, \dots \right) = 0$$

s'appelle **équation en dérivées partielles**.

Dans ce qui suit on considère un ensemble $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ et une application $F : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition A.2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On appelle solution d'une équation différentielle

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

sur I toute application $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) y est n fois différentiable sur I ;
- (ii) $\forall x \in I \quad (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \in D$
- (iii) $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \forall x \in I.$

Résoudre l'équation différentielle (A.1) c'est trouver tous les couples (I, y) où I est un intervalle et y est une solution de l'équation (A.1) sur I .

Définition A.3. On appelle ordre d'une équation différentielle ordinaire l'ordre le plus élevé de dérivée apparaissant dans l'équation.

Définition A.4. Soient $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle sous forme résolue une équation de type

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (\text{A.2})$$

Exemple A.1. $y'' + 2y = 3x$ est une équation d'ordre 2.
 $y^{(4)} - 3y^2x = 0$ est une équation d'ordre 4.

1.1.1 Conditions de Cauchy (conditions initiales)

Définition A.5. Soient $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(x_0, y_0, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ un point donné du domaine D . On appelle problème de Cauchy et on note

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0^{(1)} \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

le problème qui consiste à trouver tous les couples (I, φ) tels que I soit un intervalle contenant x_0 ($x_0 \in I$) et que φ soit une solution de l'équation différentielle $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sur I qui vérifie les conditions $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0^{(1)}$, \dots , $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Dans le cas particulier d'équations d'ordre 1 le problème de Cauchy se formule de façon suivante : étant donné un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$, une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $(x_0, y_0) \in D$ trouver tous les couples (I, y) tels que I soit un intervalle et que y vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

1.1.2 Conditions aux limites

Dans la suite de ce cours nous allons aborder essentiellement des problèmes aux limites pour les équations du second ordre. Soient $I = [a, b]$ un intervalle, $D \subset \mathbb{R}^2$. On considère une équation différentielle

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f\left(x, u(x), \frac{du}{dx}\right) \quad (\text{A.5})$$

$$(\text{A.6})$$

Définition A.6. Fixer des conditions aux bords pour l'équation (A.5) c'est préciser des valeurs que la solution $u(x)$ ou sa dérivée doit prendre aux extrémités de l'intervalle a et b . On distingue trois types de conditions aux bords.

Condition de Dirichlet ou condition de Ier type

$$u(a) = u_1, \quad u(b) = u_2$$

Condition de Neumann ou condition de IIème type

$$u'(a) = u_1, \quad u'(b) = u_2$$

Condition mixte ou condition de IIIème type

$$u(a) + \lambda u'(a) = u_1, \quad u(b) + \mu u'(b) = u_2$$

1.2 Existence et unicité de solution de problème de Cauchy

Définition A.7. Soient $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $y' = f(x, y)$ une équation différentielle. Si le problème de Cauchy (A.4) admet des solutions on dit qu'il admet une solution unique si pour toutes les solutions $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ les restrictions de φ et de ψ sur $I \cap J$ coïncident.

Définition A.8. Dans les hypothèses de la définition A.7 on dit qu'il y a unicité locale de solution du problème de Cauchy s'il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ les restrictions des solutions φ et ψ sur $I \cap J \cap V$ coïncident.

Proposition A.1. Soit le problème de Cauchy (A.4) où $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f est une fonction continue. Soit I un intervalle tel que $x_0 \in I$. Alors une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème (A.4) si et seulement si

(i) $\forall x \in I \quad (x, \varphi(x)) \in D$;

(ii)

$$\forall x \in I \quad \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

Théorème A.1. Soit $D = I \times U \times \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U est un ensemble ouvert de \mathbb{R} . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, localement lipschitzienne en deuxième variable, c'est-à-dire $\forall x \in U, \forall [a, b] \subset U, \exists K > 0$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in [a, b]^2 \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Cette solution est unique.

2 Résolution exacte des équations différentielles d'ordre 1

2.1 Equations à variables séparées (ou séparables)

Définition A.9. On appelle équations à variables séparables les équations qui peuvent être ramenées à la forme suivante :

$$y'g(y) = f(x)$$

Méthode

On écrit

$$\frac{dy}{dx}g(y) = f(x)$$

d'où

$$g(y)dy = f(x)dx$$

On calcule alors

$$G(y) = \int g(y)dy, \quad F(x) = \int f(x)dx$$

et on pose

$$G(y) = F(x) + C$$

Si $G(y)$ admet une fonction réciproque on a

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemple A.2. Résoudre l'équation différentielle

$$(x+1)y' - xy = 0$$

Séparation des variables :

$$\begin{cases} \frac{y'}{y} = \frac{x}{x+1} \\ x \neq -1 \\ y \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x+1} \\ x \neq -1 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Calcul des primitives

$$\ln(|y|) = \int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C$$

Solution

$$y(x) = \lambda \frac{e^x}{x+1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2.2 Equations linéaires

Définition A.10. Equation linéaire non homogène

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I .
Equation linéaire homogène associée

$$y' + a(x)y = 0$$

Méthode

Étape 1 Solution de l'équation homogène associée

$$y' + a(x)y = 0$$

On calcule la primitive

$$A(x) = \int a(x)dx$$

alors la solution générale de l'équation homogène associée est

$$S_0 = \{ \lambda e^{-A(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Étape 2 Recherche d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Méthode de variation de constante. On cherche une solution particulière sous forme

$$y_1(x) = \lambda(x)y_0(x)$$

où

$$y_0(x) = e^{-A(x)}$$

est une solution de l'équation homogène. On substitue dans l'équation non homogène et on trouve

$$\lambda(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx$$

Étape 3 Solution générale de l'équation linéaire non homogène

$$S = \{ \lambda(x) + \mu e^{-A(x)} \mid \mu \in \mathbb{R} \}$$

3 Résolution exacte des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition A.11. Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants **non homogène** est une équation de type

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (\text{A.7})$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle I .

Définition A.12. On appelle équation homogène associée à l'équation (A.7) l'équation suivante

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\text{A.8})$$

Définition A.13. On appelle équation caractéristique associée à l'équation (A.7) l'équation de second degré suivante

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (\text{A.9})$$

3.1 Plan de résolution.

Étape 4

Trouver deux solutions particulières $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation homogène (A.8).
Pour cela voir le paragraphe 3.2. exprimer la solution générale de cette équation

$$S_0 = \{\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Étape 5

Trouver $y_0(x)$ une solution particulière de l'équation non homogène en utilisant l'une des quatre méthodes présentées dans les paragraphes 3.3.1, 3.3.2, 3.3.2, 3.3.3. le choix de la méthode la mieux adaptée se fait selon la forme de la fonction $f(x)$.

Étape 6

Ecrire la solution générale de l'équation non homogène (A.7)

$$S = \{y_0(x) + \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

3.2 Solution d'une équation homogène

Définition A.14. Equation homogène

$$y'' + ay' + by = 0$$

Méthode

On pose l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad \Delta = a^2 - 4b$$

Si $\Delta > 0$ Deux racines simples réelles

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Deux solutions particulières

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

Solution générale

$$S_0 = \{\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $\Delta = 0$ Une racine double réelle

$$\lambda = -\frac{a}{2}$$

Deux solutions particulières

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

Solution générale

$$S_0 = \{(\alpha + \beta x)e^{\lambda x} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $\Delta < 0$ Deux racines simples complexes conjuguées

$$\lambda_1 = r + i\omega, \quad \lambda_2 = r - i\omega$$

Deux solutions particulières

$$y_1(x) = e^{rx} \cos(\omega x) \quad y_2(x) = e^{rx} \sin(\omega x)$$

Solution générale

$$S_0 = \{e^{rx}(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

3.3 Solution particulière d'une équation non homogène selon le type du second membre

3.3.1 Second membre de type 1

$$f(x) = Q(x)e^{mx}$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{C}$.

Méthode

On a $\deg Q(x) = n$. On recherche une solution particulière de l'équation non homogène (A.7) sous la forme suivante :

$$y_0(x) = P(x)e^{mx}$$

où $P(x)$ est polynôme inconnu tel que

$$\deg P(x) = \begin{cases} n, & \text{si } m \text{ n'est pas une racine du polynôme caractéristique;} \\ n + 1, & \text{si } m \text{ est une racine simple;} \\ n + 2, & \text{si } m \text{ est une racine double.} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Pour substituer $y_0(x) = P(x)e^{mx}$ dans l'équation non homogène (A.7) on calcule

$$y_0'(x) = (P'(x) + mP(x))e^{mx}, \quad y_0''(x) = (P''(x) + 2mP'(x) + m^2P(x))e^{mx}$$

et on trouve

$$[P''(x) + 2mP'(x) + m^2P(x) + a(P'(x) + mP(x)) + bP(x)]e^{mx} = Q(x)e^{mx}$$

Après simplifications on arrive à une égalité de deux polynômes :

$$Q(x) = P''(x) + (2m + a)P'(x) + (m^2 + am + b)P(x) \quad (\text{A.11})$$

Soit $N = \deg P(x)$ le degré du polynôme $P(x)$ que l'on a déterminé à partir du polynôme $Q(x)$ selon les formules (A.10). Alors

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où $\{a_N, a_{N-1}, \dots, a_1, a_0\}$ sont les coefficients inconnus du polynôme $P(x)$. En le substituant dans (A.11) sous cette forme et en regroupant les éléments selon les puissances de x on peut identifier les coefficients des polynômes à gauche et à droite de l'égalité. On obtient ainsi les $N + 1$ équations nécessaires pour trouver les coefficients inconnus du polynôme $P(x)$.

Remarque A.1 (Important!). *Lorsque la constante m est un nombre complexe quelconque les coefficients $\{a_N, a_{N-1}, \dots, a_1, a_0\}$ du polynôme $P(x)$ sont aussi des nombres complexes.*

Remarque A.2 (Cas particulier). *Lorsque m est une racine double du polynôme caractéristique on peut simplifier la recherche du polynôme inconnu $P(x)$. En effet, dans ce cas $m = -\frac{a}{2}$. En tenant compte de cela, l'équation (A.11) devient*

$$Q(x) = P''(x)$$

Il suffit donc d'intégrer deux fois le polynôme $Q(x)$

$$P'(x) = \int Q(x)dx, \quad P(x) = \int P'(x)dx$$

Exemple A.3. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = x^3 + 1$$

Etape 1

Equation homogène

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Equation caractéristique

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Racines $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. Solutions particulières de l'équation homogène

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

Solution générale de l'équation homogène

$$S_0 = \{\alpha e^x + \beta e^{-2x} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Etape 2

Solution particulière de l'équation non homogène. Ici le second membre $f(x) = x^3 + 1$ est un polynôme. C'est une fonction de type 1 car on peut l'écrire $f(x) = x^3 + 1 = e^{0 \cdot x}(x^3 + 1)$. On a alors $m = 0$, $Q(x) = x^3 + 1$ et $\deg Q(x) = 3$. On voit que $m = 0$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique. On recherche donc la solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = e^{0 \cdot x} P(x) = P(x)$$

où

$$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

est un polynôme de degré 3, comme le polynôme $Q(x)$.

Alors

$$y_0'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_0''(x) = 6Ax + 2B$$

et la substitution dans l'équation différentielle donne

$$y_0'' + y_0' - 2y_0 = 6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C - 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 + 1$$

En regroupant les coefficients selon les puissance de x à gauche on a

$$-2Ax^3 + (3A - 2B)x^2 + (6A + 2B - 2C)x + 2B + C - 2D = x^3 + 1$$

En identifiant les coefficients on trouve le système d'équations pour (A, B, C, D) :

$$\begin{cases} x^3 : -2A = 1 \\ x^2 : (3A - 2B) = 0 \\ x^1 : (6A + 2B - 2C) = 0 \\ x^0 : 2B + C - 2D = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2}, & B = -\frac{3}{4} \\ C = -\frac{9}{4}, & D = -\frac{19}{8} \end{cases}$$

D'où la solution particulière

$$y_0(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} - \frac{9x}{4} - \frac{19}{8}$$

Etape 3

Solution générale de l'équation différentielle non homogène

$$S = \left\{ -\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} - \frac{9x}{4} - \frac{19}{8} + \alpha e^x + \beta e^{-2x} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3.3.2 Second membre de type 2

$$f(x) = e^{rx}(Q(x) \sin(\omega x) + R(x) \cos(\omega x))$$

où $Q(x)$ et $R(x)$ sont des polynômes tels que $\deg Q(x) = n$, $\deg R(x) = p$

Méthode

$\lambda = r + i\omega$ **n'est pas une racine du polynôme caractéristique** On cherche une solution particulière sous la forme suivante

$$y_0(x) = e^{rx}(A(x) \sin(\omega x) + B(x) \cos(\omega x))$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes inconnus tels que $\deg A(x) = \deg B(x) = \max\{n, p\}$.

On procède ensuite comme dans le cas précédent. On substitue $y_0(x)$ dans l'équation non homogène. On identifie d'abord les polynômes facteurs de $\cos(\omega x)$ et de $\sin(\omega x)$ à gauche et à droite de l'égalité. Ensuite, en identifiant les coefficients des polynômes comme dans la méthode précédente on obtient le système de $p + 1 + n + 1$ équations pour trouver les coefficients inconnus des polynômes $A(x)$ et $B(x)$.

$\lambda = r + i\omega$ **est une racine du polynôme caractéristique** On cherche alors une solution particulière sous la forme suivante

$$y_0(x) = e^{rx}x(A(x) \sin(\omega x) + B(x) \cos(\omega x))$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes inconnus tels que $\deg A(x) = \deg B(x) = \max\{n, p\}$. On identifie les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ de la façon analogue.

Exemple A.4. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \sin(x)$$

Etape 1**Equation homogène**

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Equation caractéristique

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

Les racines $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$ sont complexes conjuguées avec $r = \operatorname{Re}(\lambda_1) = -1$ et $\omega = \operatorname{Im}(\lambda_1) = 1$. Solutions particulières de l'équation homogène

$$y_1(x) = e^{-x} \cos(x), \quad y_2(x) = e^{-x} \sin(x)$$

Solution générale de l'équation homogène

$$S_0 = \{(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x))e^{-x} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Etape 2

Solution particulière de l'équation non homogène.

Ici le second membre $f(x) = xe^{-x} \sin(x)$ de type 2 avec $\omega = 1$, $r = -1$, $R(x) = 0$, $Q(x) = x$ et $\deg Q(x) = 1$, $\deg R(x) = 0$. On voit que $\lambda = r + i\omega = -1 + i$ est une racine du polynôme caractéristique. On recherche donc la solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = e^{-x}x(A(x) \sin(x) + B(x) \cos(x))$$

où $A(x) = ax + b$ et $B(x) = cx + d$ sont des polynômes de degré $1 = \max\{0, 1\}$, comme le polynôme $Q(x)$.

Pour faciliter les calculs de substitution on peut procéder en deux étapes. premièrement, on élimine le facteur e^{-x} en faisant un changement d'inconnue $y_0(x) = e^{-x}z(x)$ avec $z(x) = x(A(x) \sin(x) + B(x) \cos(x))$. Alors

$$y_0'(x) = e^{-x}(z' - z), \quad y_0''(x) = e^{-x}(z'' - 2z' + z)$$

et la substitution dans l'équation différentielle donne

$$y_0'' + 2y_0' + 2y_0 = e^{-x}(z'' - 2z' + z + 2z' - 2z + 2z) = e^{-x}x \sin(x)$$

On obtient alors pour $z(x) = x(A(x) \sin(x) + B(x) \cos(x))$ l'équation différentielle suivante

$$z'' + z = x \sin(x)$$

Notons $U(x) = xA(x) = ax^2 + bx$ et $V(x) = xB(x) = cx^2 + cx$. Alors

$$\begin{cases} z(x) = U(x) \sin(x) + V(x) \cos(x) \\ z'(x) = (U'(x) - V(x)) \sin(x) + (V'(x) + U(x)) \cos(x) \\ z''(x) = (U''(x) - 2V'(x) - U(x)) \sin(x) + (V''(x) + 2U'(x) - V(x)) \cos(x) \end{cases}$$

La substitution donne

$$(U''(x) - 2V'(x) - U(x)) \sin(x) + (V''(x) + 2U'(x) - V(x)) \cos(x) + U(x) \sin(x) + V(x) \cos(x) = x \sin(x)$$

Après regroupement on trouve

$$(U''(x) - 2V'(x)) \sin(x) + (V''(x) + 2U'(x)) \cos(x) = x \sin(x)$$

En identifiant les polynômes facteurs de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ on trouve :

$$\begin{cases} U''(x) - 2V'(x) = x \\ V''(x) + 2U'(x) = 0 \end{cases}$$

Or, $U(x)$ et $V(x)$ sont des polynômes de second degré

$$\begin{cases} U(x) = ax^2 + bx \\ U'(x) = 2ax + b \\ U''(x) = 2a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V(x) = cx^2 + dx \\ V'(x) = 2cx + d \\ V''(x) = 2c \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} 2a - 2(2cx + d) = x \\ 2c + 2(2ax + b) = 0 \end{cases}$$

En identifiant les coefficients des polynômes dans les deux équations on trouve quatre équations pour les coefficients a, b, c, d :

$$\begin{cases} -4c = 1 \\ 2a - 2d = 0 \\ 4a = 0 \\ 2c + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{4} \\ d = 0 \\ a = 0 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où la solution particulière

$$y_0(x) = e^{-x}z(x) = e^{-x} \left(\frac{x}{4} \sin(x) - \frac{x^2}{4} \cos(x) \right)$$

Étape 3

Solution générale de l'équation différentielle non homogène

$$S = \left\{ \left[\left(\frac{x}{4} + \alpha \right) \sin(x) - \left(\frac{x^2}{4} + \beta \right) \cos(x) \right] e^{-x} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3.3.3 Méthode de variation de constante

Méthode

Le second membre $f(x)$ est une fonction continue quelconque

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions particulières de l'équation homogène trouvées précédemment. On recherche une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation non homogène sous la forme suivante

$$y_0(x) = \alpha(x)y_1(x) + \beta(x)y_2(x)$$

où les fonctions inconnues $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ vérifient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \alpha'(x)y_1(x) + \beta'(x)y_2(x) = 0 \\ \alpha'(x)y_1'(x) + \beta'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

On résout ce système par rapport aux dérivées $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$:

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \frac{f(x)y_2(x)}{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)} \\ \beta'(x) &= \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}\end{aligned}$$

On obtient alors $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ en calculant les primitives

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)} dx \\ \beta(x) &= \int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx\end{aligned}$$

3.3.4 Principe de superposition

$$f(x) = \sum_{k=1}^l f_k(x)$$

où $f_k(x)$ sont des fonctions de type 1 ,2 vus précédemment ou des fonctions quelconques.

Méthode

On utilise ici le principe de superposition.

Étape 1

On trouve une solution particulière $y_k(x)$ pour chaque équation non homogène

$$y'' + ay' + by = f_k(x)$$

selon la méthode correspondante au type du second membre $f_k(x)$.

Étape 2

La solution particulière $y_0(x)$ de l'équation non homogène

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

s'écrit alors

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^l y_k(x)$$

Annexe B

Rappels sur les séries de Fourier

Ce chapitre donne quelques rappels sur les séries de Fourier que nous allons beaucoup utiliser pour résoudre les problèmes aux limites pour les EDPs. Pour plus de détails, on peut consulter le cours d'Analyse de Marietta Manoulessou, (première année ingénieur).

1 La famille de fonctions trigonométriques

Soit un intervalle $[-L, L] \subset \mathbb{R}$. Nous allons considérer ici l'espace $L^2[-L, L]$ de fonctions réelles carré intégrables sur $[-L, L]$, muni de produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x) \cdot g(x) dx$$

et de norme induite par ce produit scalaire

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx}$$

Dans cet espace considérons la famille de fonctions

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

le résultat suivant est important pour la suite : cette famille est orthogonale par rapport au produit scalaire défini ci-dessus.

Proposition B.1. *Nous avons les relations d'orthogonalités suivantes*

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ L & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2L & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall n, m \quad (\text{B.3})$$

2 La série de Fourier d'une fonction

Définition B.1. Soit $f \in L^2[-L, L]$. On associe à $f(x)$ une série

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (\text{B.4})$$

où

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (\text{B.5})$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{B.6})$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{B.7})$$

Proposition B.2. Si la fonction $f(x)$ est paire, alors on a $\forall n, A_n = 0$.

Si la fonction $f(x)$ est impaire alors $\forall n, B_n = 0$.

On peut aussi associer des séries de Fourier à une fonction définie sur un intervalle de type $[0, L]$. Pour cela on utilise les extensions paire et impaire de $f(x)$ sur $[-L, L]$. cela donne respectivement les séries de Fourier en sinus et en cosinus :

Définition B.2. Soit $f \in L^2[0, L]$. On associe à $f(x)$ une série de Fourier en cosinus

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{B.8})$$

où

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (\text{B.9})$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{B.10})$$

$$(\text{B.11})$$

et une série en sinus

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{B.12})$$

où

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (\text{B.13})$$

Exemple B.1. Calculer la série de Fourier en sinus et en cosinus de $f(x) = 1$, $x \in [0, L]$.

Série en sinus. On calcule les coefficients

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2L}{Ln\pi} \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^L = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Ainsi la série en sinus associée à $f(x)$ est

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

La série en cosinus se calcule plus facilement

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L 1 dx = 1 \quad (\text{B.14})$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L 1 \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$(\text{B.16})$$

On utilise ici la propriété d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et le fait que $1 = \cos(0\pi x)$.

3 Convergence de séries de Fourier

La question qui se pose maintenant est d'une grande importance : quel est le lien réel entre une fonction donnée et sa série de Fourier ? Une fonction f peut elle être égale à sa série de Fourier ? Si oui, sous quelles conditions ? Et dans quelle mesure une série de Fourier partielle peut approcher la fonction f ?

Nous rappelons ici quelques théorèmes importants qui donnent les réponses à toutes ces questions.

Théorème B.1 (Convergence simple d'une série de Fourier). *Supposons que la fonction $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux ainsi que sa dérivée première f' . Alors $\forall x \in [-L, L]$ la*

série de Fourier associée à f converge vers la quantité $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. On peut ainsi écrire que pour tout $x \in [-L, L]$ on a

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

Théorème B.2 (Premier critère de convergence uniforme). *Supposons que la fonction $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux ainsi que sa dérivée première f' . Si les coefficients de Fourier de f vérifient*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) < \infty$$

alors la série de Fourier de la fonction f converge uniformément.

Théorème B.3 (Premier critère de convergence uniforme). *Supposons que la fonction $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que sa dérivée première f' est continue par morceaux. Supposons en plus que $f(-L+0) = f(L-0)$.*

Alors la série de Fourier de la fonction f converge uniformément.

Index

- équation aux dérivées
 - elliptique, 18
- équation aux dérivées partielles
 - elliptique, 25
 - hyperbolique, 18, 25
 - parabolique, 18, 25
- équation aux dérivées partielles linéaire, 15
- équation d'onde
 - problème aux limites, 59
- équation de Sturm-liouville
 - fonction propre de , 10
 - solution de , 10
 - valeur propre de , 10
- équation différentielle, 81
 - solution de, 82
- équations paraboliques
 - conditions aux limites de Neumann, 39
 - conditions aux limites non homogènes, 34
 - fonction de Green, 45
 - principe de superposition, 33
 - problème aux limites homogènes, 33
 - solution de problème homogène, 35
 - solution de problème non homogène, 37
- équivalence par changement de variables, 17

- Cauchy
 - problème de , 83
- conditions aux bords
 - de Dirichlet, 16
 - de Neumann, 16
 - mixtes, 16

- Equation de Sturm-Liouville, 9

- modèle de propagation de chaleur, 31

- problème de Cauchy, 83

- séparation de variables, 28
 - constante de séparation, 28
 - solutions séparées, 28

- théorème
 - Cauchy-Lipschitz, 84

- vibrations d'une corde , 57