ECOLE INTERNATIONNALE DES SCIENCES DU TRAITEMENT DE L'INFORMATION

E.I.S.T.I. Département Mathématiques

2 ème Année PARCOURS MATH FINANCE 2019-2020

Preparation pour le Projet: EDP et Différences Finies

Résolution numérique des équations paraboliques

Partie 1 Conditions aux limites de Dirichlet

L'équation et les conditions aux limites de Dirichlet s'ecrit de la forme:

$$\left\{\begin{array}{c} u_t = u_{xx} + t^2 \\ u(t=0,x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \\ u(t,x=0) = 1 - 10\sin(10\,t) \\ u(t,x=1) = -1 + 20t \end{array}\right. \tag{1}$$

Implémentation(notations du cours théorique).

Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:
x: $x_0 = 0, ...x_i, ...x_{N+1} = L$.
t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.
Donc

$$\left\{\begin{array}{c} i = 0,1,2,...N+1 \\ n = 0,1,2,...M+1 \\ \Delta x = \frac{L}{N+1} \\ \Delta t = \frac{T}{M+1} \\ u(t_n, x_i) \equiv u_i^n \end{array}\right. \tag{2}$$

Conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{c} u_0^n = 1 - 10\ \sin(10\,t(n))) \\ u_{N+1}^n = -1 + 20\,t(n) \\ n = 1, ..., M+1. \end{array}\right. \tag{3}$$

Conditions initiales :

$$\left\{\ u_i^0 = \cos(\pi x(i)) + \sin(\pi x(i)) \quad i = 0,1,2..., N+1\right. \tag{4}$$

Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:
pour $\frac{\partial u}{\partial t}$ la dérivée avancée,
pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ la seconde dérivée, centrée,
On obtient

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i+1}^n + u_i^n (1 - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}) + (\Delta t) t(n)^2$$

et on commence les calculs par $n = 0$.

IMPLEMENTATION EN MATLAB

- **Discrt́iser l'espace-temps et définir les vecteurs:**

  ◦ $x = (0 : N + 1) \cdot \Delta x \qquad ou \quad x = linspace(0, L, N + 2)$

Par conséquent les coordonnées du vecteur x portent les vraies valeurs :
$x(1) = 0$,
$x(2) = \Delta x$,
$x(3) = 2\Delta x, ...,$
$x(N + 2) = (N + 1)\Delta x \equiv L$
Il y a $N + 2$ composantes: **i=1 : N+2**

  ◦ $t = (0 : M + 1) \cdot \Delta t \qquad ou \quad t = linspace(0, T, M + 2)$

Par conséquent les coordonnées du vecteur t portent les vraies valeurs :
$t(1) = 0$,
$t(2) = \Delta t$,
$t(3) = 2\Delta t, ...,$
$t(M + 2) = (M + 1)\Delta t \equiv T$
Il y a $M + 2$ composantes.

- **Programmation structurée**

1. Définir dans Editor les conditions initiales et programmer la fonction **Condition_initiale(x)**

   function[f]=**Condition_initiale(x)**
   $f = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$
   end

Sauvegarder cette fonction semarement dans un repertoire cree.

2. Définir dans Editor les conditions aux limites et programmer la fonction **Condition1_limite (t), Condition2_limite (t)**

   function[f]=**Condition1_limite (t)**
   $f = 1 - 10\sin(10t)$
   end

   function[f]=**Condition2_limite (t)**
   $f = -1 + 20t$
   end

3. Creer une fonction principale **Equation1_Euler()**

- **Commencer l'indexation de 1 (déplacer de 1 tout les indices fixes thoériques)**

function[ ] = **Equation1_Euler( )**
Pour $i = 1 : N + 2$
$u(1, i)$=**Condition_initiale**$(x(i))$
Fin Pour

```
figure;
plot(x,u(1,:));
title('Condition initiale')
```

Pour $n = 2 : M + 2$
$u(n, 1)$=**Condition1_limite** $(t(n))$
$u(n, N + 2))$=**Condition2_limite**$(t(n))$
Fin Pour

```
figure;
plot(t,u(:, N+2),t,u(:, 1));
title('Conditions aux limites') . . .
end
```

Le schéma est stable si

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

- **Programme principal**

Dans la fonction principale ajouter **Equation1_Euler()** les codes suivants:

```
for n=1:1+M
for i=2:N+1
u(n+1,i)=...Vous completez ....
end
end
```

1) Visualisez la fonction $u(x, t)$ aux instants t différents $(t = 0, t = T/2, t = T)$

```
figure;
plot(x,u(M+2,:));
plot(x,u(T/(2*Δt) +1 , :));
title('solution t=T et T/2')
```

2) Visualisez la surface $u(x, t)$

```
figure;
surf(x,t,u);    ou    mesh(x,t,u);
xlabel('coordonnee x')
ylabel('coordonnee t')
zlabel('fonction u')
title('solution U_t = U_x x+t^2');
```

La fonction mesh du Matlab produit la surface colore.

Pour obtenir la surface colorée avec surf(x,t,u) on réduit le nombre de points tracés: on trace un point parmi cent points temporels.

```
for j=1:51
W(j,:)=u((j-1)*100+1,:);    end
tnew=(0:50)*T/(50);
figure
surf(x,tnew,W);
```

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 1 \\ T = 1 \\ M = 4999 \\ N = 19 \end{cases}$$

3) Prenez $M = 99 \quad (\Delta t = 10^{-3})$ et observez la divergence de l'algorithme.

Partie 2 Conditions aux limites de Neumann

L'équation et les conditions aux limites de Neumann s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 200 \cdot t \cdot \cos(8\pi x) \\ u(t=0,x) = (x-1)^3 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=0) = 3 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Implémentation numérique.

Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:
x: $x_0 = 0, ...x_i, ...x_{N+1} = L$.
t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.
Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N+1 \\ n = 0, 1, 2, ...M+1 \\ \Delta x = \frac{L}{N+1} \\ \Delta t = \frac{T}{M+1} \\ u(t_n, x_i) \equiv u_i^n \end{cases} \tag{6}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_0^n = u_1^n - 3\Delta x \\ u_{N+1}^n = u_N^n \\ n = 1, ..., M+1 \end{cases} \tag{7}$$

Conditions initiales :

$$\left\{ u_i^0 = (x(i)-1)^3 \quad i = 0, 1, 2..., N+1 \right. \tag{8}$$

Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:
pour $\frac{\partial u}{\partial t}$ la dérivée avancée,

pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ la seconde dérivée, centrée.
Obtenir l'équation discrete.
Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 1 \\ T = 1 \\ M = 4999 \\ N = 19 \end{cases}$$

- **Programme principal**

for n=1 : 1+M
for i=2 : N+1
$u(n+1, i) = ...Vouscompletez....$
end
$u(n+1, 1) = u(n+1, 2) - \Delta x \cdot$ condition_limite1Neuman($t(n+1)$)
$u(n+1, N+2) = u(n+1, N+1) + \Delta x \cdot$ condition_limite2Neuman($t(n+1)$)
end

1) Visualisez la fonction $u(x, t)$ aux instants t différents ($t = 0, t = T/2, t = T$)
2) Visualisez la surface $u(x, t)$