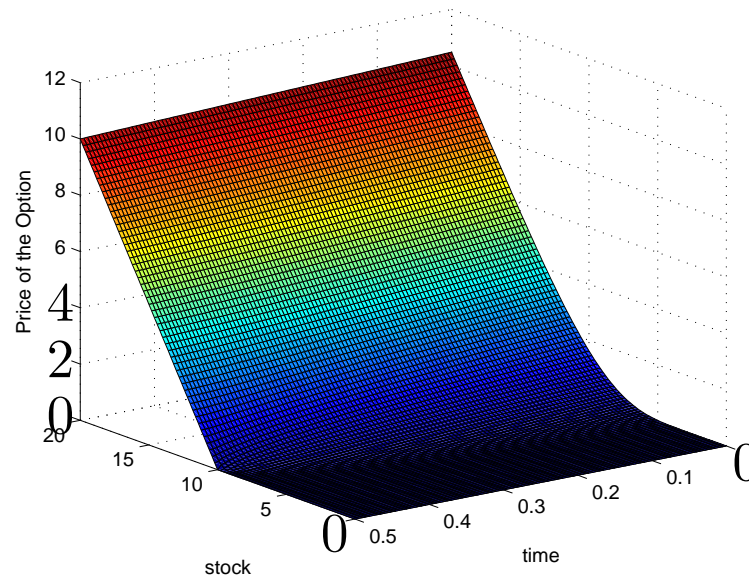


# PROJET MF1. EDP. Méthodes Numériques et Analytiques.

Irina Kortchemski, EISTI



# Application des EDP

- Finance et Économie
- Mécanique quantique
- Dynamique des structures
- Mécanique des fluides
- Théories de la gravitation
- Electromagnétisme (Équations de Maxwell)
- Simulation aéronautique
- Synthèse d'images
- Prévision météorologique
- Relativité générale
- Biologie,    Medicine.

# Contenu du Projet

- Méthode aux Différences Finies pour les Équations Différentielles aux Dérivées Partielles. Livrable 1.
  - Méthodes d'Euler.
  - Méthode de Crank-Nicolson.
- Méthodes Analytiques pour les EDP. Livrable 2.
- Visualisation des solutions: surfaces-solutions
- Comparaison des résultats
- Résolution numérique des Equations Hyperboliques. Livrable 3.
- Animation des ondes

# Classification des EDP

- **Equations Paraboliques.**
  - Equation de la chaleur.
- **Equations Elliptiques**
  - Equation de Poisson.
- **Equations Hyperboliques.**
  - Equation d'onde
- **Equations non linéaires**
  - Equation de Burgers.
  - Equation de Korteweg de Vries. Solitons
  - Equation de Sine-Gordon. Solitons

# Avantages des Différences Finies

- Application de la méthode aux Différences Finies (DF) à la finance
  - Méthodes de Monte-Carlo étaient plus populaires.
  - Méthodes de EDP sont plus rapides et donnent plus d'information sur la marché.
  - Recherches sur les EDP non linéaires pour prévoir Inflations, Crash market, Big trader, Risque de contrepartie, coût de transaction ...
- Application de la méthode aux Différences Finies à l'industrie et à la science
  - DF sont unique (presque) méthode qui permet de résoudre une équation complexe, dont la solution Analytique n'exite pas.

# Objectifs du Projet

- Est-ce que le EDP a des solutions?
- Quel type de "données" (Conditions initiales et aux limites) devons-nous spécifier pour résoudre le EDP ?
- Les solutions correspondant aux données sont-elles uniques?
- Comment résoudre une EDP analytiquement, numériquement?
- Quelles sont les propriétés qualitatives et quantitatives basiques de la solution?
- Que se passe-t-il si nous modifions légèrement les données initiales? La solution varie-t-elle légèrement également ? (La stabilité)

# Modélisation et les DF

On modélise des phénomènes par

- Equations Différentielles Ordinaires
- Equations Différentielles aux Dérivées Partielles
- Equations Différentielles Stochastiques
- Théorème de Feynman - Kac relie les méthodes déterministes (Différences Finies) de la résolution des EDP et les méthodes de Monté - Carlo.
- Cours de MF2 "Méthodes Numériques Avancées pour les Finance" est une démonstration expérimentale  
Théorème de Feynman - Kac

# Equations Fondamentales

- Equation de la chaleur (Parabolique )

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x, t)$$

- Equation d'onde (Hyperbolique )

$$\frac{\partial u}{\partial t} - V_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

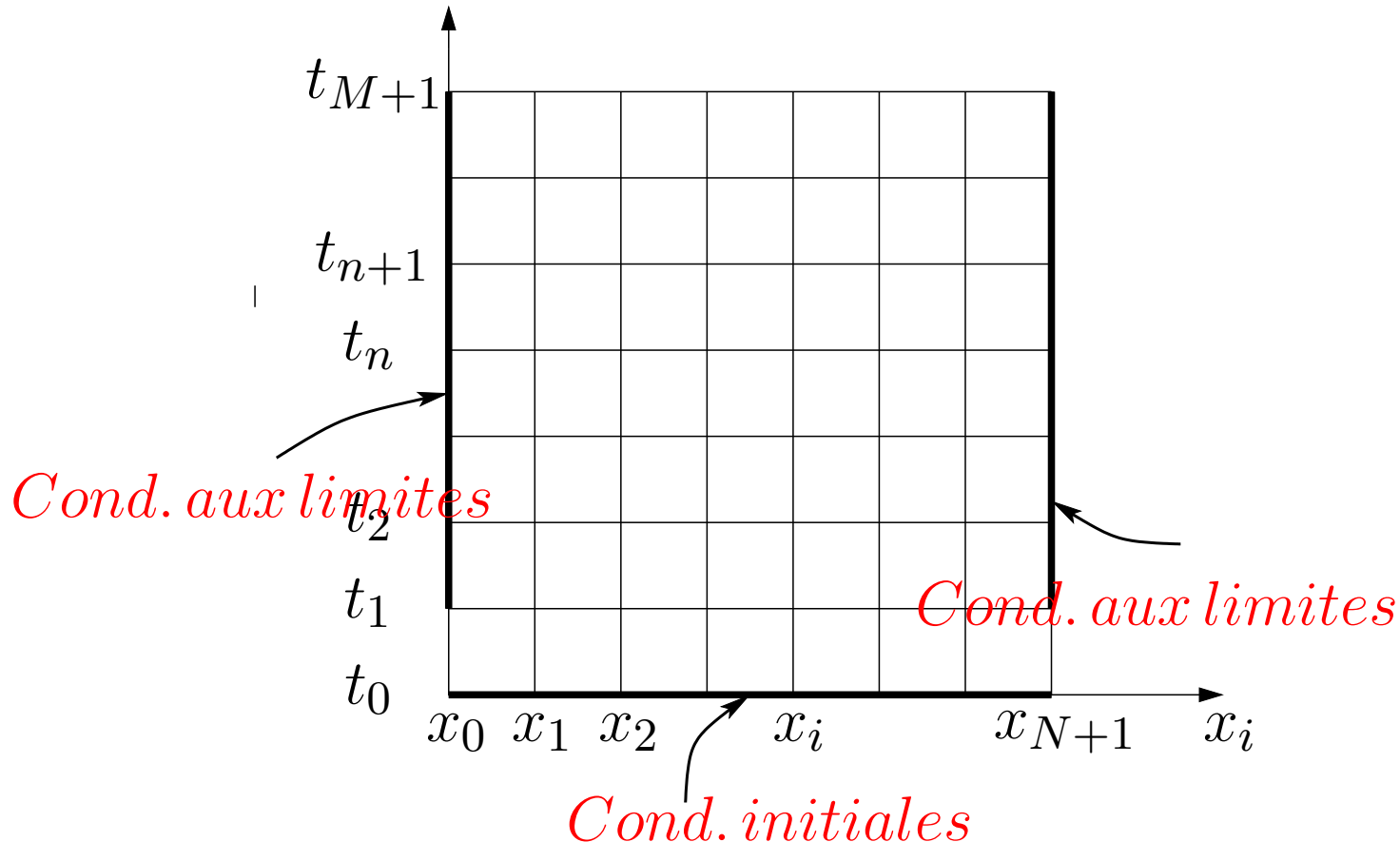
- Equation de Poisson (Elliptique )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

# Idée 1 de Différences Finies

## ● Discrétisation des l'espace-temps

- variable spatiale  $x$ :  $x_0 = 0, \dots, x_i = i\Delta x, \dots, x_{N+1} = L$ .
- variable temporelle  $t$ :  $t_0 = 0, \dots, t^n = n\Delta t, \dots, t_{M+1} = T$ .



# Idée 2 de Différences Finies

- Discrétisation des dérivées
- Dérivée temporelle

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_i) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + T_1(u)$$

$$T_1(u) = -\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (\Delta t) - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^2$$

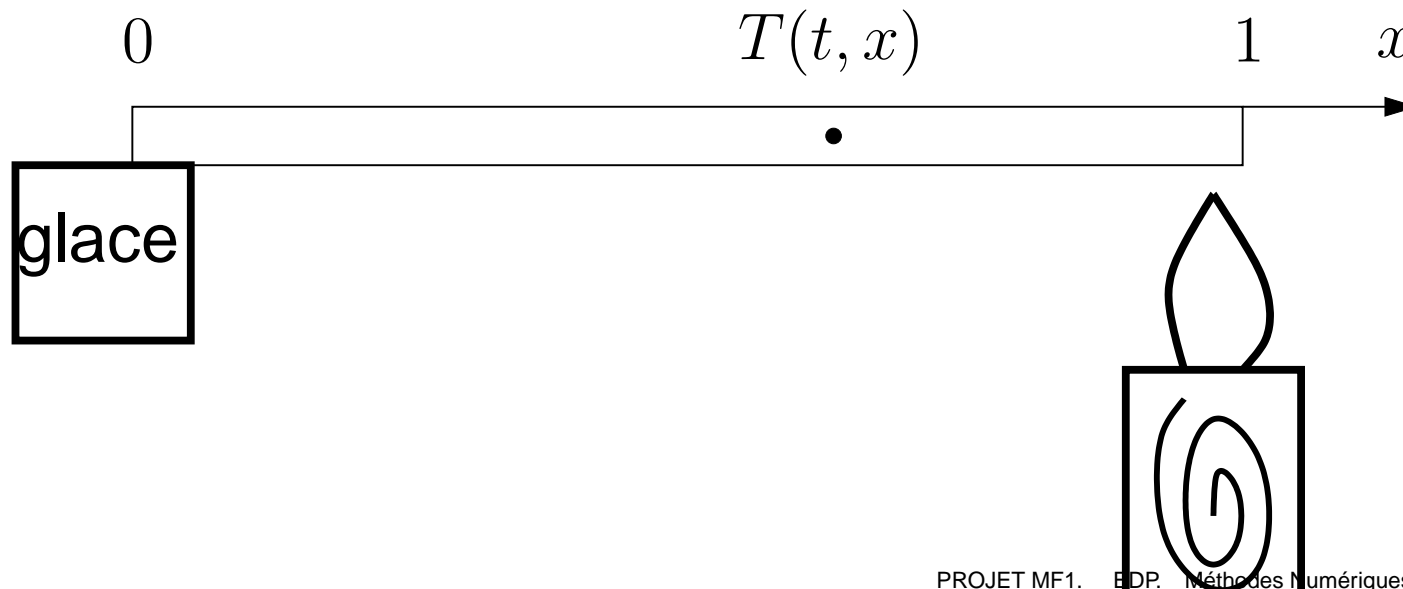
- Dérivée spatiale

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_i) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

# Initial- Boundary Value Probleme

- $T(t, x)$  est la temperature d'une tige en point  $x$  à l'instant  $t$ .

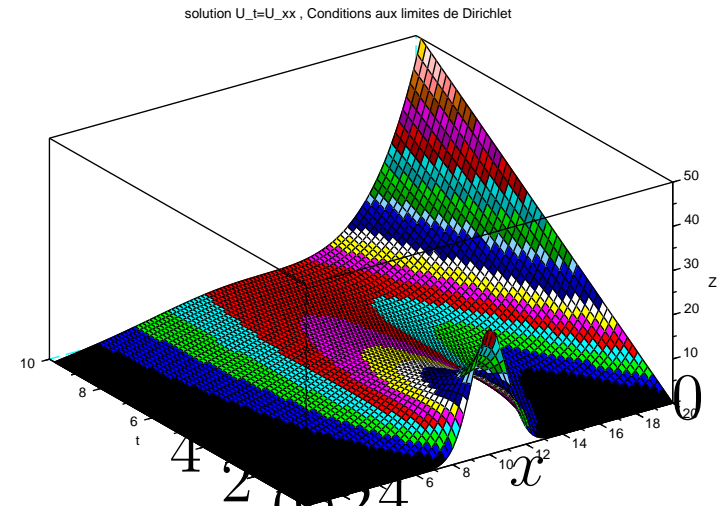
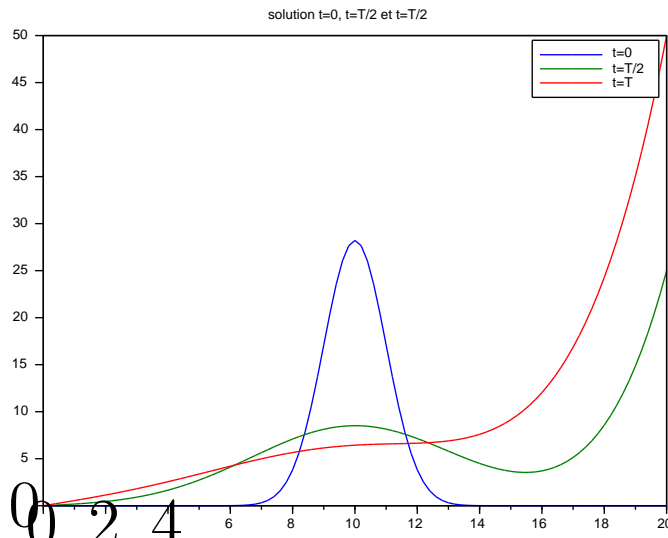
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, 1] \\ T(t = 0, x) = \frac{50}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}} \quad (\text{initial conditions}) \\ T(t, x = 0) = 0 \quad (\text{boundary condition}) \\ T(t, x = 1) = 5t \quad (\text{boundary condition}) \end{array} \right.$$



# Solution numérique

●  $T(t, x)$  est la température d'une tige en point  $x$  à l'instant  $t$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad x \in [0, 1] \\ T(t = 0, x) = \frac{50}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}} \quad (\text{conditions initiales}) \\ T(t, x = 0) = 0 \quad (\text{condition aux limites}) \\ T(t, x = 1) = 5t \quad (\text{condition aux limites}) \end{array} \right.$$



# Solution Analytique

●  $T(t, x)$  is the temperature of a rod in point  $x$  at time  $t$

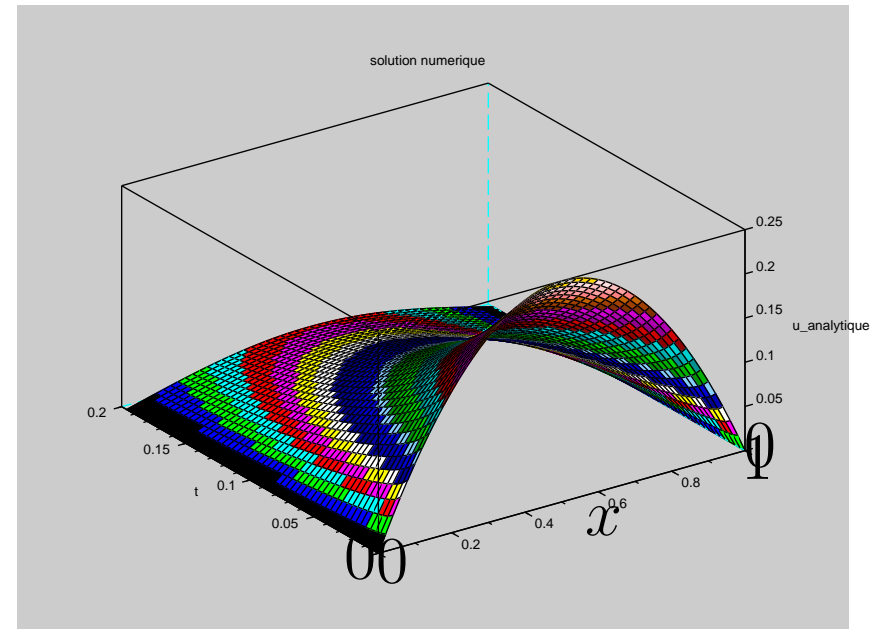
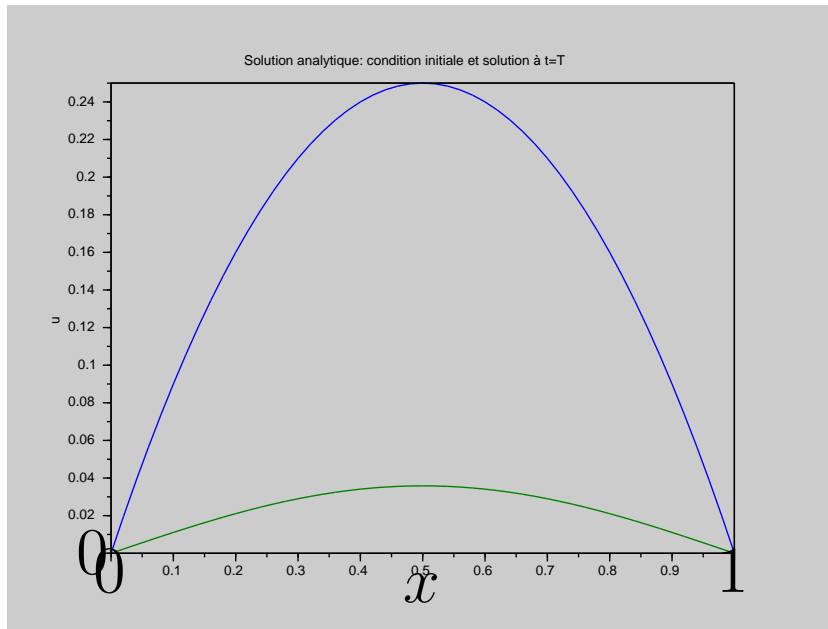
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad x \in [0, 1] \\ T(t = 0, x) = x(1 - x) \quad (\textit{initial conditions}) \\ T(t, x = 0) = 0 \quad (\textit{boundary condition}) \\ T(t, x = 1) = 0 \quad (\textit{boundary condition}) \end{array} \right.$$

● Solution analytique

$$T(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{(\pi n)^3} \sin(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}$$

# Solution Numérique

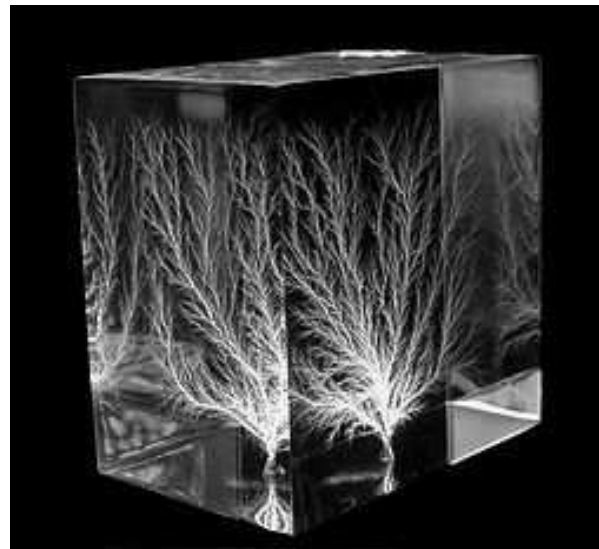
- Solution Numérique in 2 and 3 dimensions:



# Equations Diff. Stochastiques



- On simule par DF les Marches aléatoires, le Mouvement Brownien et diffusion, les "Cluster Growth models", les Amas DLA, la Percolation, la Courbe SLE.
- La courbe SLE est objet de recherche du mathématicien français Wendelin Werner (et de ses collaborateurs) qui a été récompensé en 2006 par la Médaille Fields.



- L'équation stochastique de Boltzmann est objet de recherche du mathématicien français Cedric Villani qui a été récompensé en 2010 par la Médaille Fields.

# Equation de Kolmogorov

- Équation avancée, que vérifie **la probabilité de transition conditionnelle**

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \\ P(t, x; T, y) = \delta(y - x), \quad t \rightarrow T \end{cases}$$

- Equation donne la densité de probabilité d'avoir été au point  $(t, x)$  à conditions que maintenant on est au point  $(T, y)$ .

- Équation retrograde

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial(\mu(t, x)P)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma(t, x)^2 P)}{\partial x^2} = 0 \\ P(t, x; T, y) = \delta(y - x), \quad t \rightarrow T \end{cases}$$

# Equation de Black et Scholes

- Equation de Black et Scholes est l'objet du **Projet MF2**.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t = T, S) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

- $V(S, t)$  est le prix d'un contrat avec une banque pour pouvoir acheter au prix  $K$  une action à la date  $T$ .
  - $S$  est le prix d'une action
  - $r$  est le taux d'intérêt
  - $\sigma$  est une volatilité
  - $K$  est le prix d'exercice
  - $T$  est le temps d'exercice
- Vous achetez au prix  $K$  une action qui vaut  $S$  à la date  $t = T$ 
    - Si  $S > K$  vous gagnez  $S - K$
    - Si  $S < K$  vous n'exercez pas le contrat.

# Black et Scholes multidimensionnelle

Options à deux actifs: Basket option

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T, ) = \max(S_1 + S_2 - K, 0) \end{cases}$$

Options à deux actifs: Exchange option

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T, ) = \max(S_2 - S_1, 0) \end{cases}$$

Options à deux actifs: Quotient option

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \\ V(S_1, S_2, t = T, ) = \max(S_2/S_1 - K, 0) \end{cases}$$

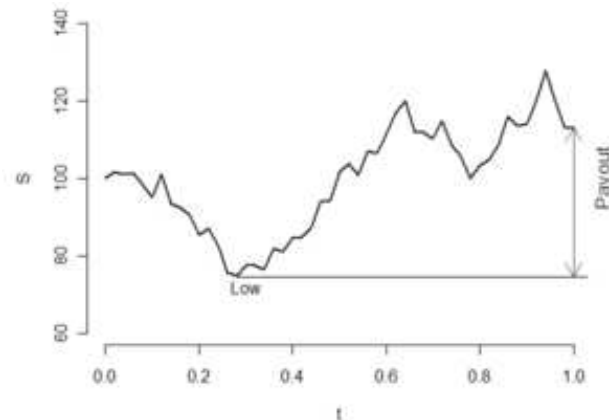
# Lookback Option. Call

● Prix de l'option  $V(S, M, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \quad 0 \leq M \leq S \\ V(t = T, S, M) = \max(S(T) - M, 0) \quad 0 \leq M \leq S \\ \frac{\partial V}{\partial M}(T, S, M)|_{M=S} = 0 \end{array} \right.$$

● Valeur minimale de l'action de l'intervalle de temps  $[0, T]$  de risk sur

$$M_T = \min(S_\tau, 0 \leq \tau \leq T)$$



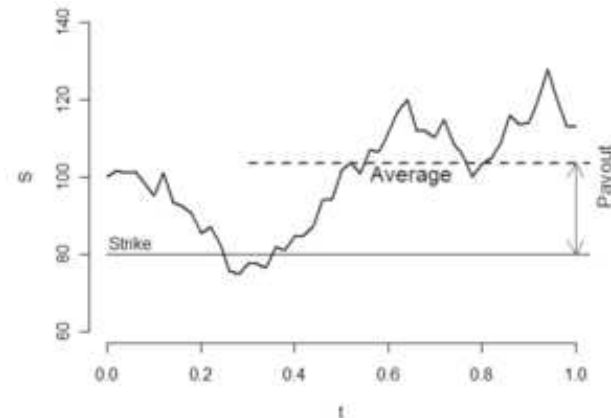
# Options asiatiques strike fixe. Call

- Prix de l'option  $V(S, A, t)$  vérifie l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{S-A}{t} \frac{\partial V}{\partial A} = 0 \\ V(t = T, S, A) = \max(A(T) - K, 0) \end{cases}$$

Prix d'une options asiatiques  
 $V(t, S, A)$  porte sur un actif  $S$  et  
sur la valeur moyenne

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$



# Options Américaines

- Equation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \min\left(\frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, V - \Lambda(S)\right) = 0 \\ V(t = T, S) = \Lambda(S) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

- Algorithmes utilisant les Différences Finies
  - Euler explicite
  - Euler implicite
  - Algorithme PSOR (Projected Successive Over Relaxation)
  - Algorithme de Brennan et Schwartz
  - Algorithme de Newton
  - Algorithme de Howard
  - Algorithme de Splitting

# Optimisation d'un portefeuille

## Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann

Un portefeuille est constitué d'un actif risqué et d'un actif non risqué.

- $\alpha_t$  correspond à la part investie dans un actif risqué
- $1 - \alpha_t$  correspond à la part investie dans des actifs sans risque
- $S_t$  est la valeur de l'actif qui vérifie une équation différentielle stochastique

On cherche  $\alpha_t$  de sorte qu'on optimise l'espérance de l'utilité  $\mathbb{E}[h(S_T)]$  ( $h$  est une fonction utilité). On doit estimer la valeur du portefeuille

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t, x) = \text{Sup}_{\alpha_t} \mathbb{E}[h(S_T) | S_t = x] \end{array} \right.$$

La valeur  $U(t, x)$  est la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{Sup}_{\alpha_t} [(\alpha_t \mu + (1 - \alpha_t)r)x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha_t^2 \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}] = 0 \\ U(t = T, x) = h(x), \quad x > 0 \end{array} \right.$$

On résout l'équation à l'aide des Différences finies et on effectue l'optimisation pour chaque itération avec l'Algorithme de Howard.

# Equation de Dupire

- Dans un modèle de volatilité locale les prix de Call  $V(t, S(t); T, K)$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K} - \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} = 0 \\ V(t = 0, K) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

- L'équation calcule les prix d'option pour **tous strikes**  $K$  et **maturités**  $T$  à une date donnée.
- On utilise équation de Dupire pour recalculer **la fonction de volatilité**  $\sigma^2(K, T)$  à partir des prix d'option du marché:

$$\sigma^2(K, T) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}}}$$

# Calibration en finance

- Equation de Dupire donne le prix de l'option  $V(K, T)$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial T} + rK \frac{\partial V}{\partial K} - \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} = 0 \\ V(t=0, K) = \max(K - S, 0) \end{cases}$$

- On résout l'équation de Dupire par DF.
- Comment la volatilité  $\sigma$  dépend de  $K, T$ ? On paramétrise la volatilité  $\sigma$  par des paramètres  $\beta_i$  (par splines cubiques):  $\sigma(K, T) \rightarrow \sigma(K, T, \beta_i)$ .
- On résout le problème d'optimisation: le problème de moindres carrés:

$$\min_{\{\beta_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n |V(K_i, T_i, \beta_i) - (V_i)_{(marche)}|^2 \right\}$$

# Equation de Heston

● Modèle de Heston est une généralisation de l'équation de Black et Scholes pour une volatilité stochastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma_t dW_t \\ d\sigma_t = a_t dt + b_t dW'_t \\ d \langle W, W' \rangle = \rho dt \\ \frac{dB_t}{B_t} = r dt \end{array} \right.$$

● **Méthode 1:** On applique les **DF** pour discrétiser les équations et les simuler par Monte-Carlo.

● **Méthode 2:** On résout l'EDP de Heston en trois dimensions à l'aide des **DF**:

$V(t, S, \sigma)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \sigma b_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \lambda(t, \sigma, S) \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 \\ V(t = T, S, \sigma) = \Lambda(S) = \max(S - K, 0) \end{array} \right.$$

● Problème: comment imposer les conditions aux limites?

# Sauts des actifs

- Equation intégro-différentielle avec les sauts

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \\ \lambda \int_{\mathbb{R}} (V(t, S \cdot (1 + y)) - V(t, S)) \nu(dy) = 0 \\ V(t = T, S) = \Psi(S) \end{array} \right.$$

- $\lambda$  est la probabilité des sauts par unité de temps.

- $\nu(dy)$  est la mesure de Poisson

- Modèle de Merton  $\nu(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

- Modèle de Kou et Wang

$$\nu(dy) = \rho \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{y>0} dy + q \eta_2 e^{-\eta_2 y} \mathbf{1}_{y<0} dy$$

# Modèles de taux d'intérêt

- Equation pour le "Bond"  $B(r, t)$  avec "Coupon"  $K(t)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} - rB + (u(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + K(t) = 0 \\ B(t = T, r) = Z \end{cases}$$

- Taux  $r$  vérifie l'éq. stoc.  $dr_t = \sigma(r, t)dW_t + u(r, t)dt$

$$\sigma(r, t) = \sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)},$$

$$u(r, t) = -\gamma(t)r + \eta(t) + \lambda(r, t)\sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)}$$

- Modèles:

- Vasicek
- Cox, Ingersoll, Ross
- Hull, White

# Couverture d'un portefeuille

- On calcule des Grecques en remplaçant les dérivées par **les différences finies**.

- $\Delta = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial S}$

- $\Gamma = \frac{\partial^2 V(S,t;T,K)}{\partial S^2}$

- $\Theta = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial T}$

- $Vega = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial \sigma}$

- On peut simuler HEDGING à l'aide des différences finies.

Pour couvrir une Call Européenne de maturité  $T$  et prix d'exercice  $K$  il faut

- Acheter  $\Delta_t = \frac{\partial V(S,t;T,K)}{\partial S}$  actions

- Placer  $B_t = V(S,t;T,K) - \Delta_t S_t$  à la banque.

# Equations d'Einstein

- Equation de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\rho} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci
- $R$  est le scalaire de Ricci
- $g_{\mu\nu}$  est le tenseur métrique qui décrit la géométrie de l'espace - temps
- $\Lambda$  est la constante cosmologique
- $G$  est la constante gravitationnelle
- $T_{\mu\nu}$  est le tenseur d'énergie-impulsion
- $\Lambda < 0$  pour expliquer la présence de l'énergie sombre?

# Loi de Hubble

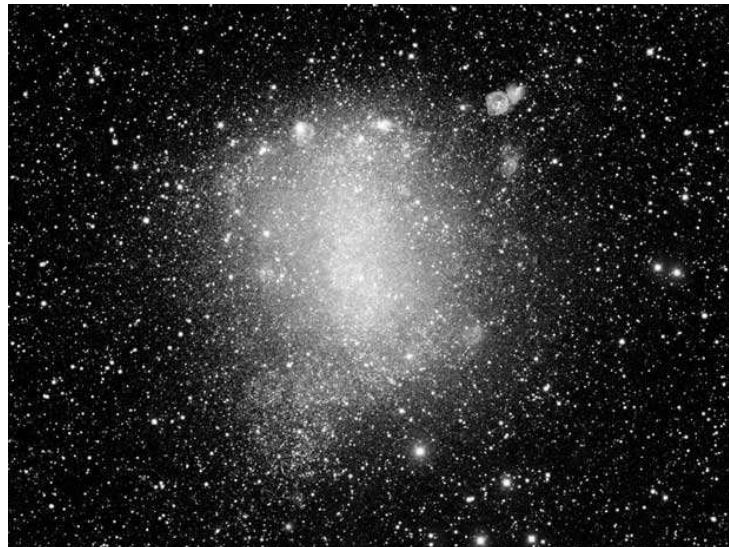
Equations d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\rho} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Comment trouver la constante de Hubble  $H$  dans la loi qui relie la vitesse de fuite des galaxies avec la distance?

$$v(R) = A + HR$$

Matière et le rayonnement se forment un fluide parfait avec la densité  $\rho$  et une pression  $p$ .



# Loi de Hubble

● Fluide cosmologique vérifie les équations de Friedmann-Lamaitre

$$H^2 = \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

● Méthode 1- théorique: Résolution des équations par DF avec 4 paramètres.

● Méthode 2- expérimentale: Résolution du problème d'optimisation linéaire (moindres carrés linéaire ) pour trouver la constante de Hubble

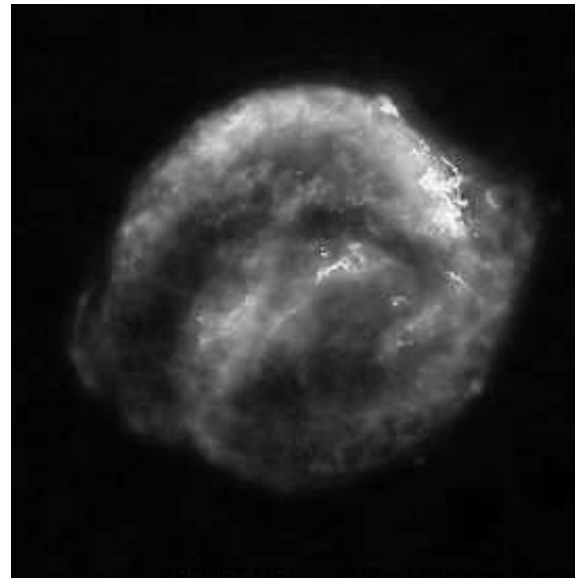
$$v(R) = A + HR$$

Explosion de Supernova du Type Ia.

Pour trouver la constante de Hubble:

- On construit une courbe de l'intensité de Supernova en fonction du temps.
- De cette courbe on calcule la vitesse  $v(R)$  et la distance  $R$ .

●  $H=72$  km/s/Mps

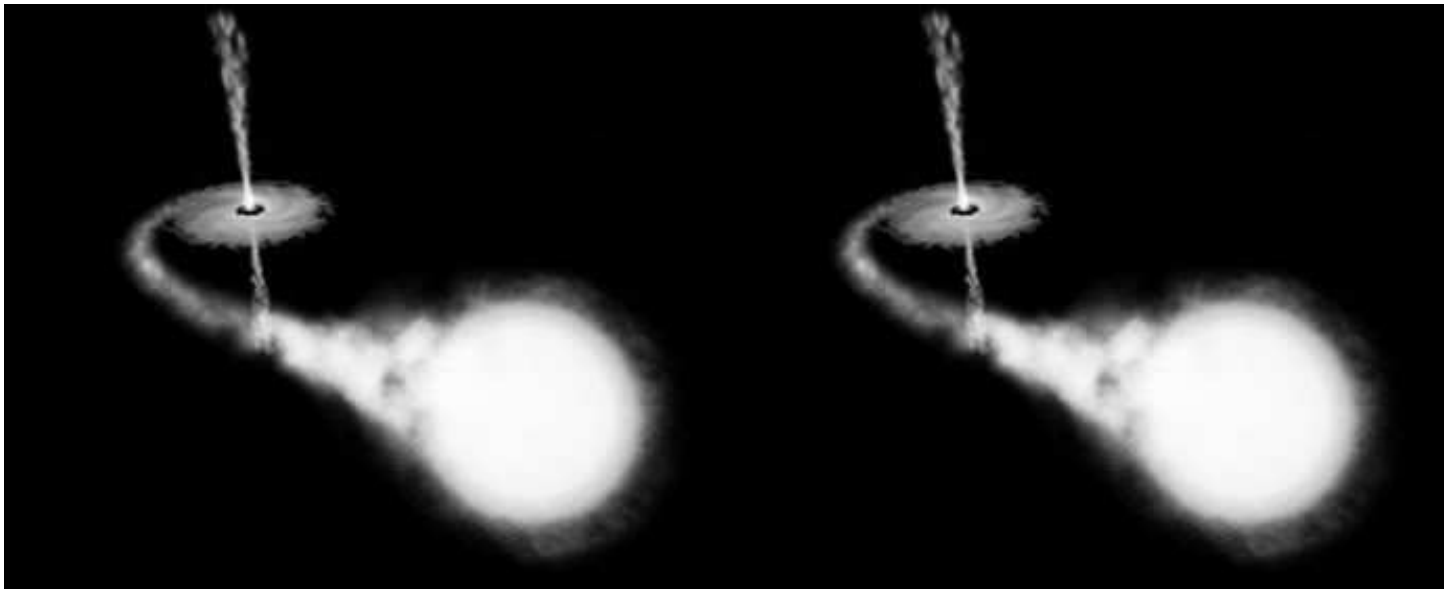


# Binary Black Hole Grande Challenge

- Equations d'Einstein

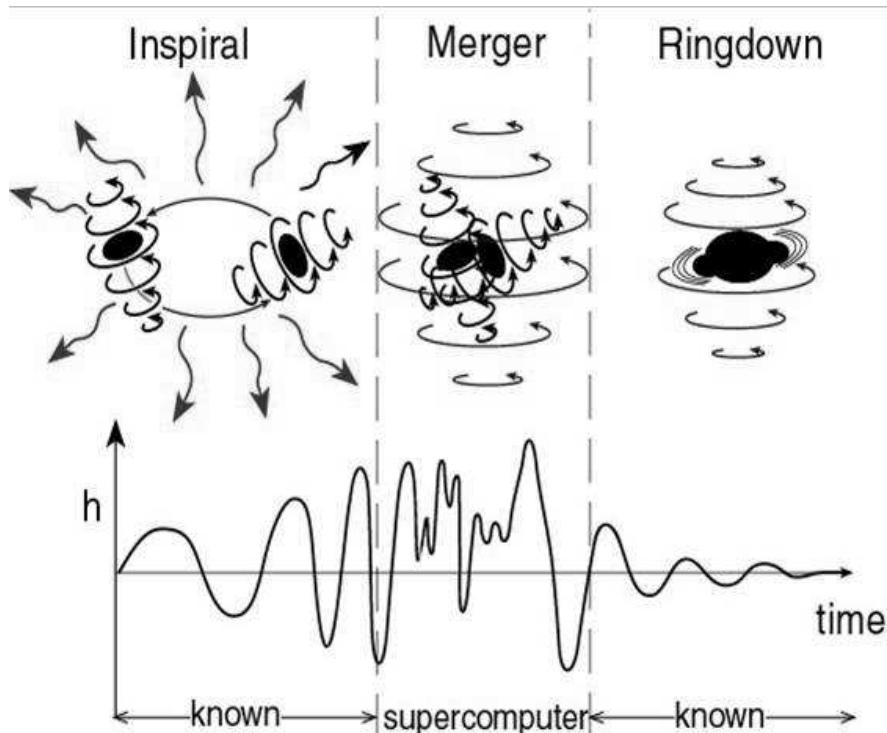
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\rho} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

- Binary Black Hole Grande Challenge



# Binary Black Hole Grande Challenge

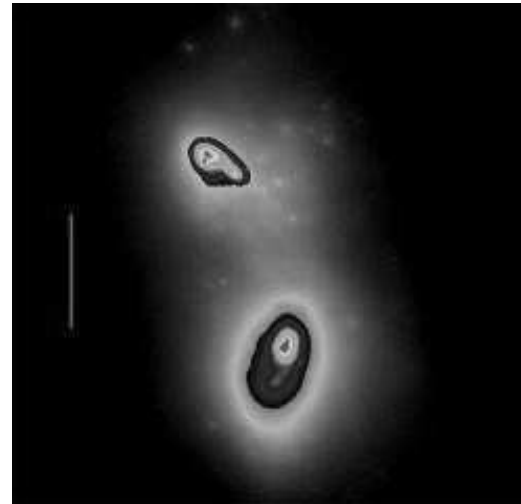
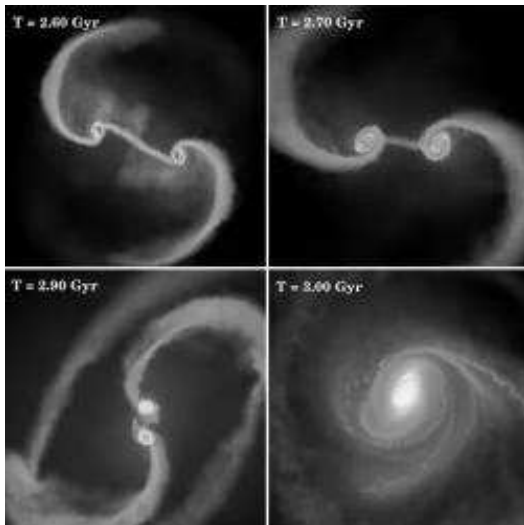
## ● Pourquoi simuler?



- Pour comprendre la nature des ondes gravitationnelles émises pendant la période de fusion. Très important pour la détection.
- Tester la relativité générale d'Einstein dans le régime de champs forts et nonlinéaires.

# Binary Black Hole Grande Challenge

## Simulations:



## Difficultés:

- Discrétiser les équations à l'aide des Différences Finies: faire des couches de l'espace - temps à 4 dimensions, obtenir l'ensemble des hyperuricemia à 3dim.
- Traiter les singularités spatiales
- Problème de deux échelles: la longueur d'onde gravitationnelle  $\gg$  le rayon de l'orbite.

# Binary Black Hole Grande Challenge

Equations d'Einstein se réduisent au problème de Cauchy avec 10 équations

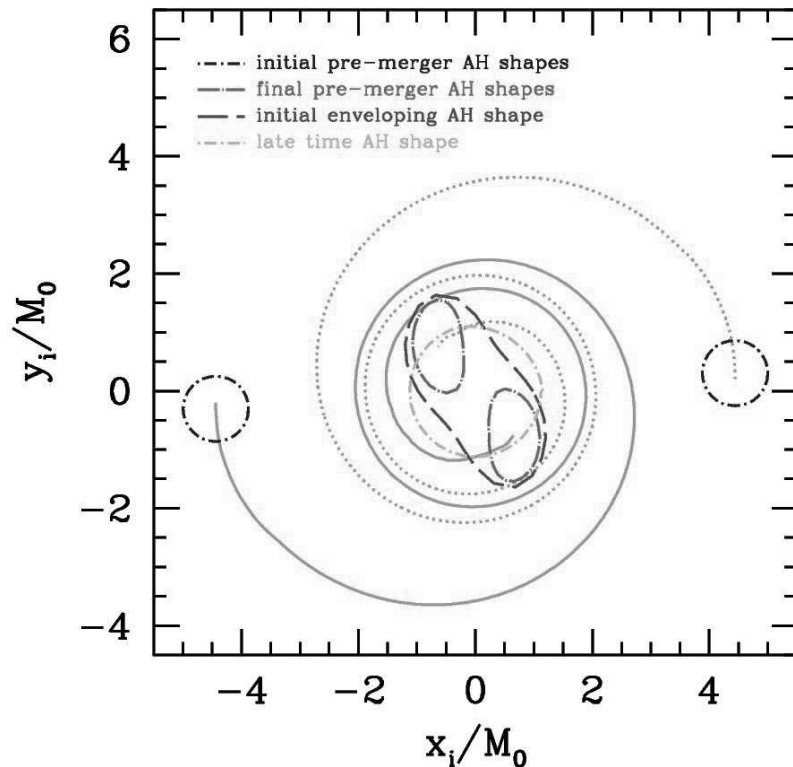
BSSN evolution equations for  $\{\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i\}$ :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi - \mathcal{L}_\beta \phi &= -\frac{1}{6} \alpha K & \gamma_{ij} &= e^{4\phi} \tilde{\gamma}_{ij} \quad (\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}) \\
 \partial_t K - \mathcal{L}_\beta K &= -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha & \gamma^{ij} &= e^{-4\phi} \tilde{\gamma}^{ij} \\
 \partial_t \tilde{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma}_{ij} &= -2\alpha \tilde{A}_{ij} & K_{ij} &= \tilde{A}_{ij} e^{4\phi} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \\
 \partial_t \tilde{A}_{ij} - \mathcal{L}_\beta \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} [-D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - S_{ij})]^{TF} & \tilde{A}^{ij} &= e^{4\phi} A^{ij} \quad (\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} A_{ij}) \\
 &+ \alpha (K \tilde{A}_{ij} - 2 \tilde{A}_{il} \tilde{A}_j^l) & \tilde{\Gamma}^i &\equiv \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij} \\
 \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \beta^j \partial_j \tilde{\Gamma}^i \\
 &- \tilde{\Gamma}^j \partial_j \beta^i + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_j \beta^j - 2 \tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha \\
 &+ 2\alpha (\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6 \tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K)
 \end{aligned}$$

# Binary Black Hole Grande Challenge

Résultats:

- Découverte des relations entre la fusion et des paramètres initiales.
- Simulation de la fusion de deux trous noirs de masse équivalentes, de l'émission des ondes gravitationnelles.
- **Découverte des ONDES GRAVITATIONNELLES!**



# Mouvement des astres célestes

- Problème de deux corps: le mouvement d'une masse  $M$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt} = \frac{G M X(t)}{(\sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2})^3} \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{G M Y(t)}{(\sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2})^3} \\ V_x(t) = \frac{dX}{dt} \\ V_y(t) = \frac{dY}{dt} \end{array} \right.$$

- On résout par DF les équations en utilisant les algorithmes de Euler-Cromer et Runge-Kutta.
- A l'aide des simulations on pourra observer:
  - Phénomènes de résonances parmi des astéroïdes - fentes de Kirkwood
  - Mouvement d'Hyperion, la plus petite des lunes de Saturne.

# Equations d'onde

## Equation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

La nature des ondes ou des paquets d'onde ou des fluctuations qui se propagent peut être très différentes.

## Equations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

## Onde électromagnétique dans un conducteur diélectrique

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 n^2(E) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

- Guidage
- Antennes

# Equation de Schrodinger

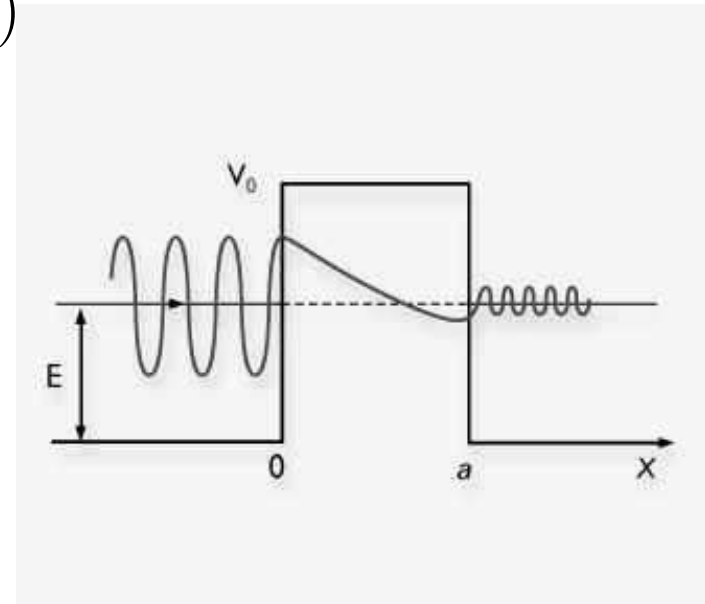
- Equation de Schrodinger décrit la fonction d'onde,  $|\Psi(x, t)|^2 dx$  est la probabilité de presence d'une particule sur l'intervalle  $[x, x + dx]$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - V(x) \Psi = 0$$

- Simulation du **chat de Schrodinger**:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|Vivant\rangle + |Mort\rangle)$$

- Simulation de la diffusion d'une particule quantique sur un potentiel



# Equation de Schrodinger

- Applications dans les technologie des supraconducteurs, lasers, des désintégrations (fission, radioactivité alpha), des transistors, certaines diodes, différents types de microscopes, l'effet Josephson.
- MRG: Magnétorésistance géante, **Minituarisation des disques dures...**
- **Equation de Klein-Gordon**

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - m^2 \Psi = 0$$

L'équation de Klein-Gordon est une version relativiste de l'équation de Schrodinger décrivant des particules massives.

# Equation de Korteweg de Vries

- Equation de Korteweg de Vries décrit des ondes solitaires

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$$

- Découverte des solitons par J. S. Russell
- Théorie des vagues par Korteweg et de Vries

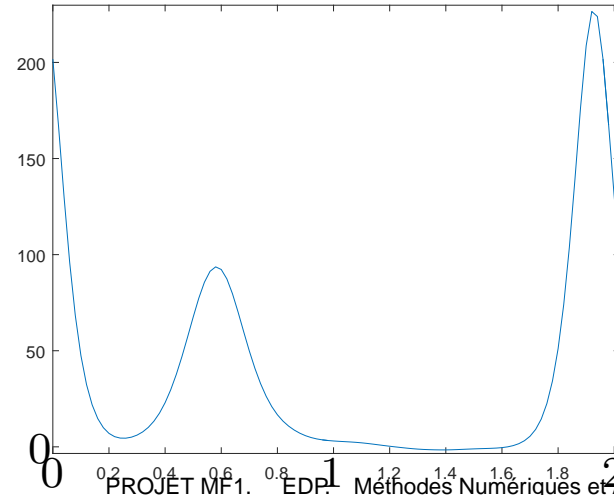
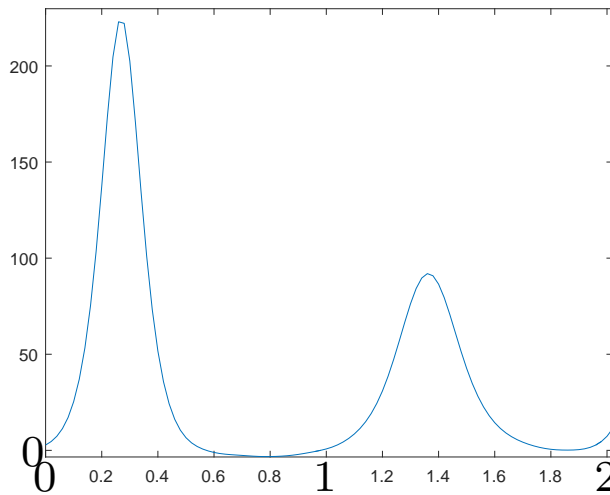
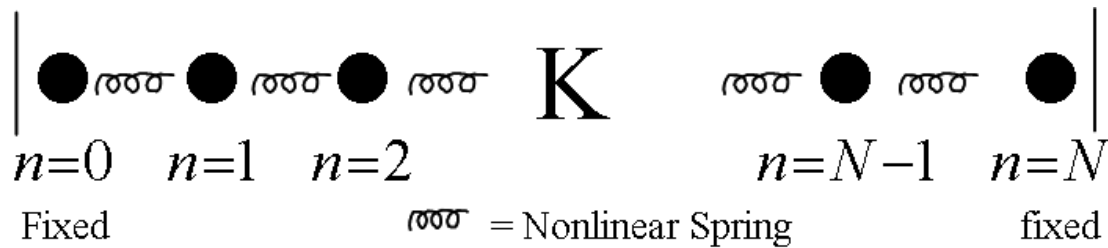


- Tsunamis

# Equation de Korteweg de Vries

Equation de Korteweg de Vries  $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0$

Redécouverte des solitons au cours des simulations réalisées en 1953 par Enrico Fermi, John Pasta, et Stan Ulam. Ils ont utilisé le plus puissant l'ordinateur MANIAC-1 (Mathematical Analyzer Numerical Integrator And Computer)



# Solitons

- Solutions analytiques de KdV sont possible:

- Un soliton: 
$$U(x, t) = \frac{b}{2ch^2(\sqrt{b}/2(x-bt))}$$

- Découverte en Mathématiques fondamentales: la méthode de la diffusion inverse de résolution analytique des EDP nonlinéaires.

- Equation de Sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sin U$$

L'équation de Sine-Gordon décrit les solitons dans un cristal.

- Applications: Fibres optiques, Reactions termonucléaires, Superconducteurs (Effet tunnel de Josephson)

# Equation de Keller-Segel

- Equations de Keller-Segel

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( n(t, x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + n - \Phi \end{cases}$$

Ces équations recouvrent une colonies bactériennes qui adopte des mouvements collectifs surprenants à partir de communications individuelles élémentaires.

- $n(t, x)$  est la densité des bactéries
- $\Phi(t, x)$  est la densité de la "nourriture"
- Application: Biologie, Medicine

# Equations de Navier-Stokes

- Equations de **Navier-Stokes**

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - [\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}] \right) = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad} (\text{div} \vec{v})$$

- Équations **d'Euler**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = - \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

# Equations de Navier-Stokes

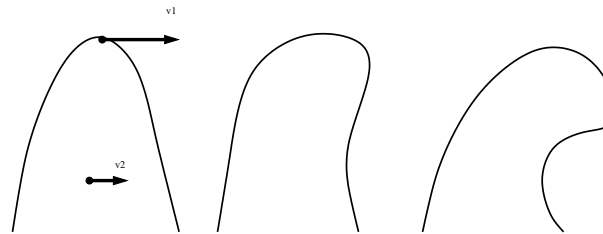
- Écoulement bidimensionnel d'un fluide réel visqueux incompressible

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

# Écoulement 1 - dim d'un fluide

## Equation de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$



## Modélisation des ondes de choc

Le sommet d'une vague se propage avec la vitesse plus grande que celle du sol. Ce phénomène, la dispersion, explique pourquoi les vagues tombent et se déferlent.

# Computational Fluid Dynamics

- AERODYNAMIQUE EXTERNE
- APPLICATION AU BÂTIMENT
- ENERGIES
- HYDRAULIQUE
- TRANSFERTS THERMIQUES
- MÉDECINE
- MÉTÉOROLOGIE



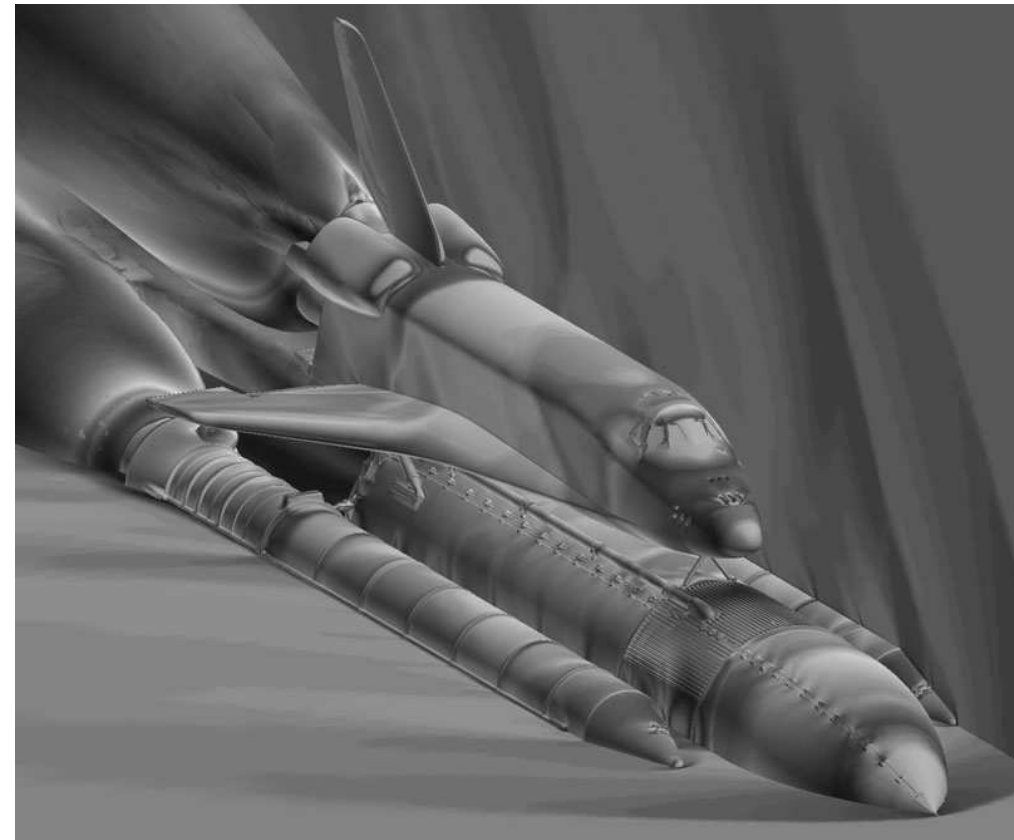
# Computational Fluid Dynamics

- permet de simuler l'écoulement autour ou à l'intérieur d'un corps ; d'évaluer les forces subies par un corps soumis au vent ou se déplaçant dans l'air ou dans l'eau

- de déterminer les puissances de chauffage ou de climatisation nécessaires dans un bâtiment ainsi que les meilleurs emplacements pour les ventilations

- de déterminer les concentrations chimiques en différents endroits d'un réacteur, la corrosion, la séparation de deux phases (sable et eau par exemple)...

- permet à partir de la géométrie intérieure du circuit hydraulique de connaître avec précision: la répartition du débit dans les différents composants du



# Bouchon automobile

- On décrit la circulation automobile par le nombre d'automobiles  $n(x, t)$  par unité de longueur.
- Si la vitesse des automobiles est une constante  $v_0$  alors  $n(x, t)$  est la solution de l'équation d'advection:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

Donc si la circulation à  $t = 0$  est fluide le bouchon ne se forme pas.

- On affine le modèle en supposant que la vitesse est une fonction de la concentration  $n$ :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right) \text{ pour } 0 \leq n \leq n_{max}, \quad v = 0 \text{ pour } n \geq n_{max}$$

# Equations stationnaires

- **Equation de Poisson**,  $\rho(x, y)$  est la densité locale de charge

$$\begin{cases} \Delta V = -\rho(x, y) & x \in \Omega \\ V(x, y) = h(x, y) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Système de Lamé**

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- **Equation des plaques ( modélisation du tremblement de terre)**

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

# Equations stationnaires

- Equation de Helmholtz

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u(t = 0, x) = g(x) \\ u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

L'équation de Helmholtz est une équation elliptique qui apparait lorsque l'on cherche des ondes d'Alembert, appelées " modes propres ". Pour que le problème mathématique soit bien posé, il faut spécifier une condition aux limites sur le bord du domaine.

- Apparition des solutions discrètes

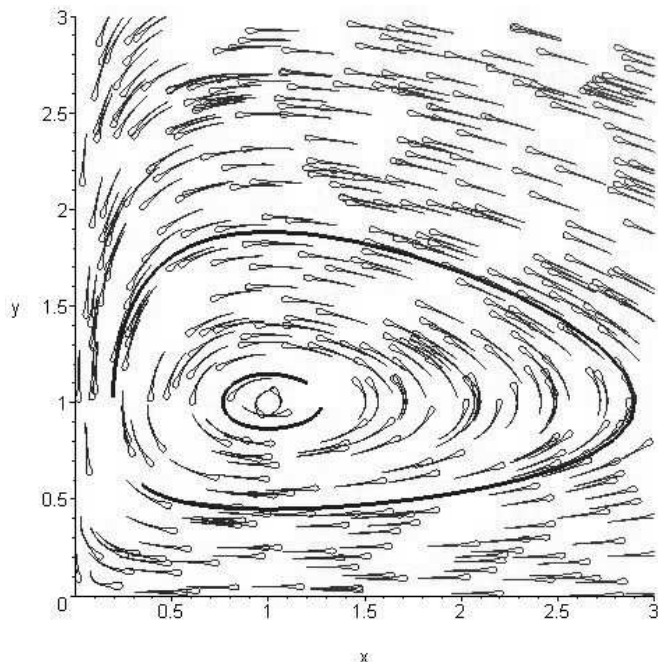
# Systeme de Lotka-Volterra

Systemes des equations ordinaires.

Systeme de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - b x(t) y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\beta y(t) + c x(t) y(t) \end{cases}$$

$x(t)$  est la population des proies,  $y(t)$  est la population des predateurs.



# Attracteur de Lorentz

● Attracteur est une courbe vers laquelle un système dynamique évolue de façon irréversible.

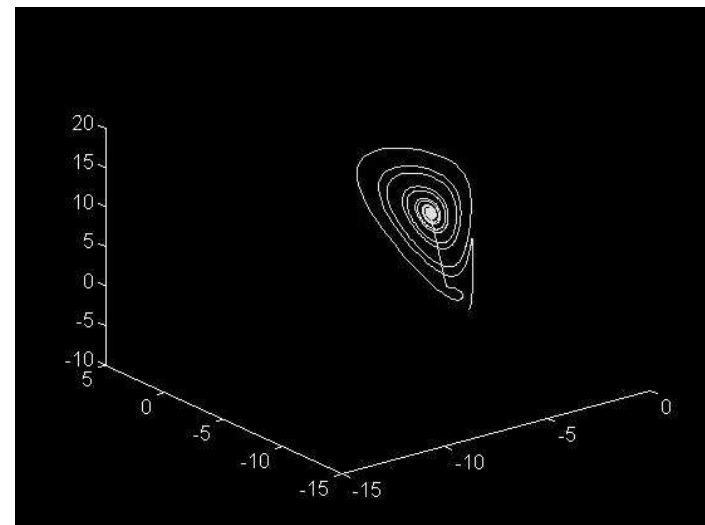
● Attracteur est un constituant de base de la théorie du **CHAOS**,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = rx(t) - x(t)z(t) - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - bz(t) \end{array} \right.$$

● Attracteurs expliquent aussi des cas de passage d'un état chaotique à un état ordonné.

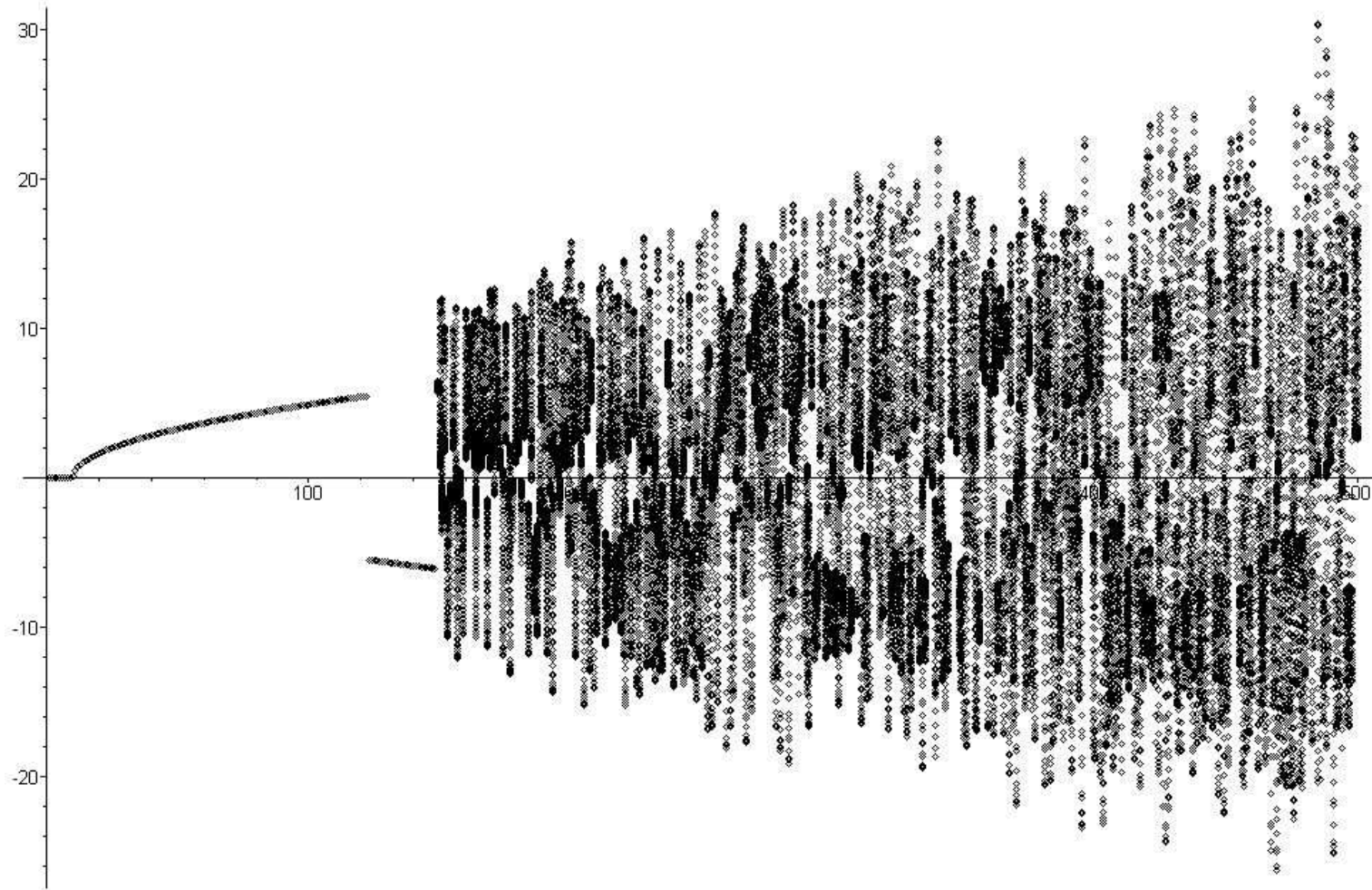
● Connaissance des attracteurs permet de savoir ce qui va émerger du chaos.

● Applications: Plasmas, dans les calculs de confinement des tokamaks.



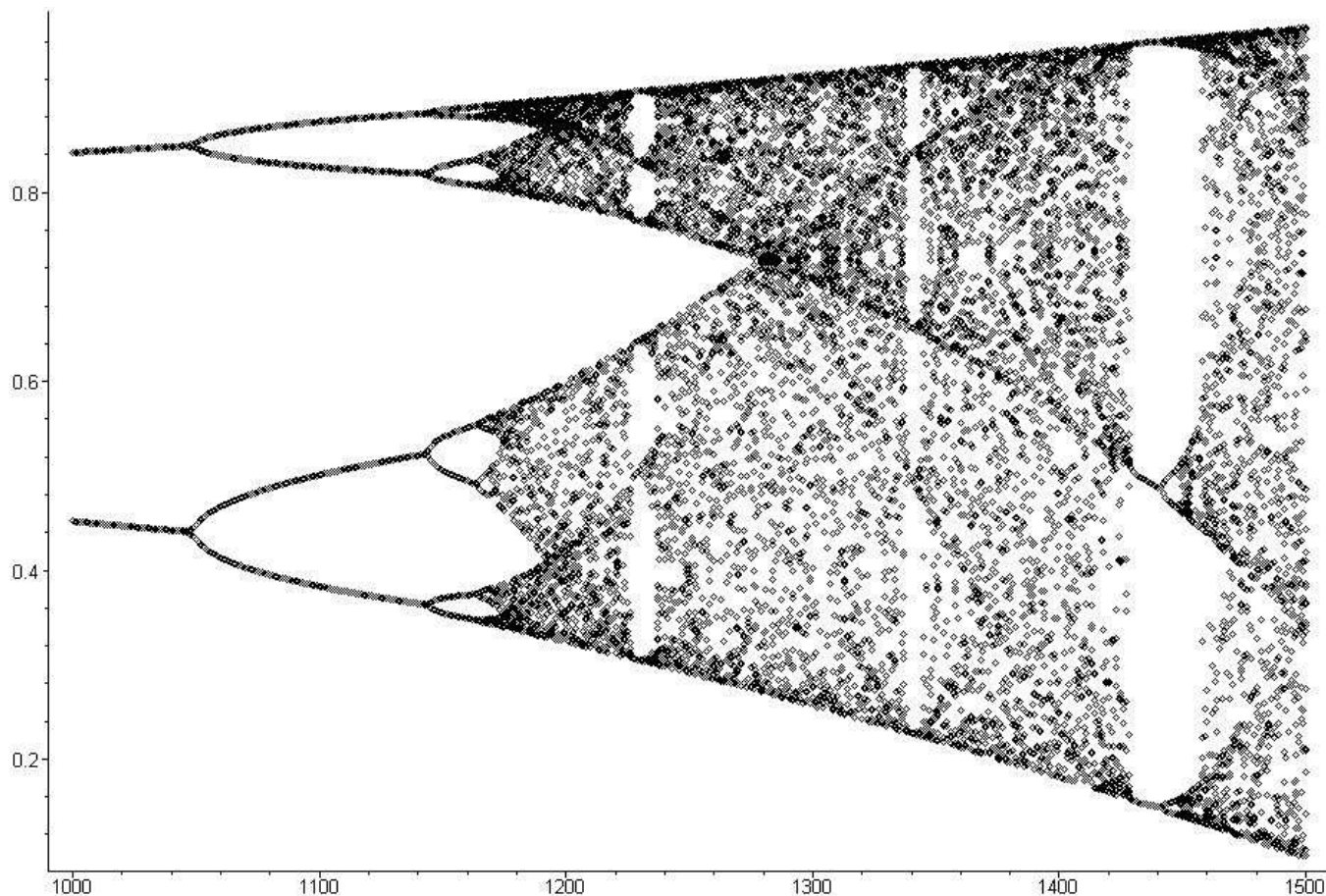
# Attracteur de Lorenz

## ● Diagramme de bifurcation



# Map logistique

Equation  $x_{n+1} = \mu \cdot x_n (1 - x_n)$  et la diagramme de bifurcation:  $\mu \rightarrow x_{n+1}$ ,  $n$  sont grands



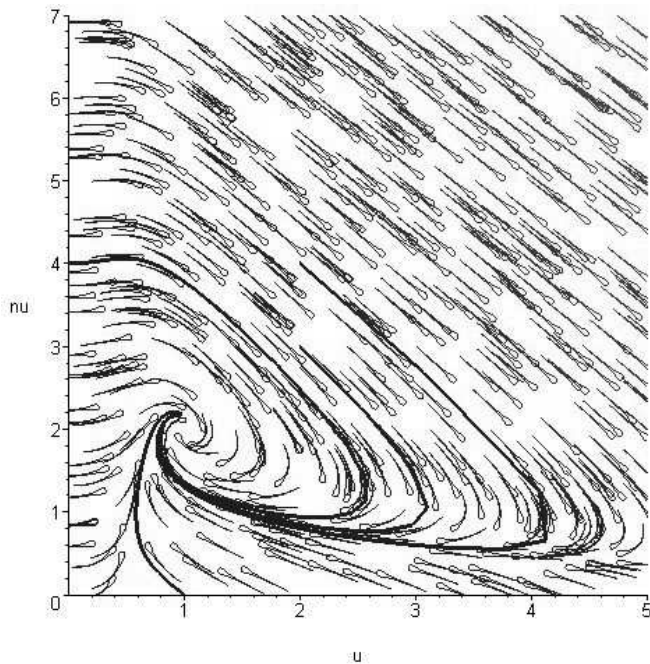
Fractales

# Brusselateur

## Brusselateur

The brusselator est un modèle mathématique pour les oscillations chimiques. La dynamique des concentrations  $x(t)$  et  $y(t)$  est donnée par les équations:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 1 - (b + 1)x(t) + a x^2(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = b x(t) - a x^2(t)y(t) \end{cases}$$

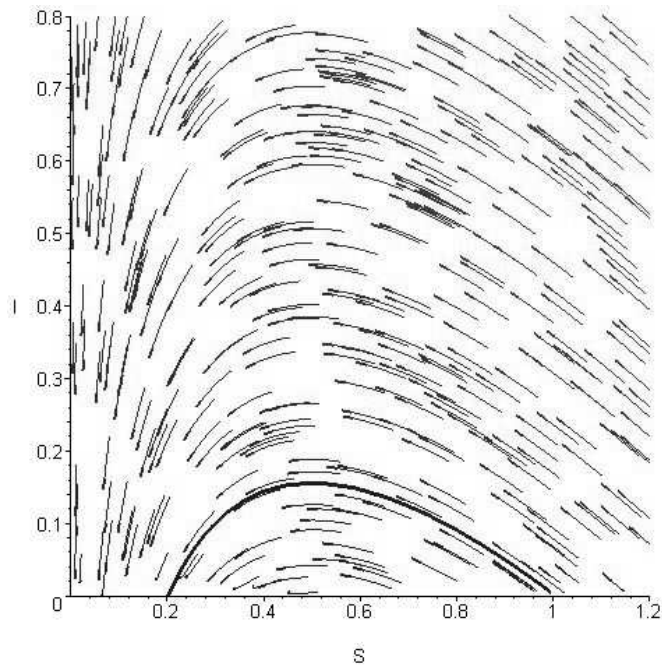


# Modèle d'épidémie de McKendrick

## ● Modèle d'épidémie de Kermack-McKendrick

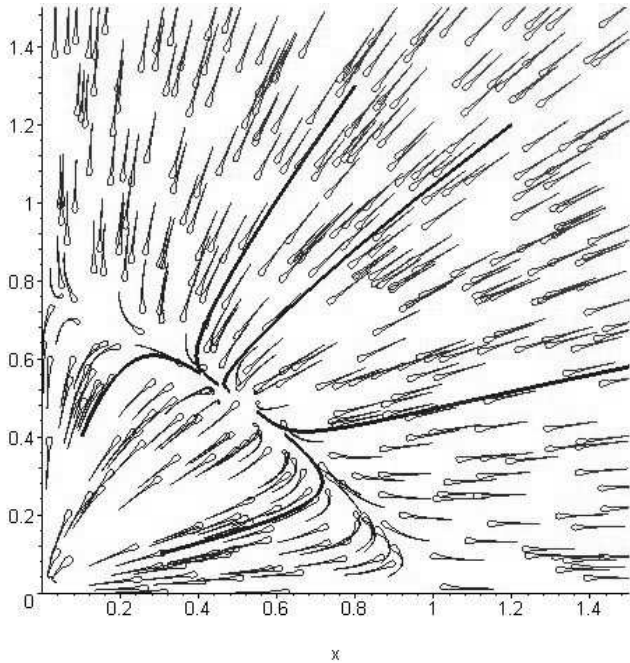
C'est un modèle SIR (Susceptible, Infected, Recovered):  $S(t)$  est la proportion de la population susceptible à être infectée,  $I(t)$  est la proportion infectée de la population.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{cases}$$



# Populations en competitions

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - \delta_1 x(t) - \alpha_1 y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(a - \delta_2 y(t) - \alpha_2 x(t)) \end{cases}$$



# Oscillator Van der Pol

C'est un oscillator qui n'effectue que des petits oscillations.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \mu(1 - x^2) \frac{dx(t)}{dt} + x \end{array} \right.$$

