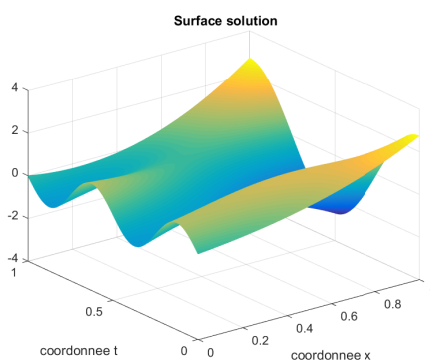


SPÉCIALISATION "MATHÉMATIQUE DE FINANCE"

Projets de Pôle "EDP - Différences Finies - MatLab, SciLab, Python "

Irina Kortchemski



ENONCÉS

I. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

PARTIE 1. ETUDE ANALYTIQUE

PARTIE 2. ETUDE NUMÉRIQUE

PARTIE 3. GRAPHES ET SURFACES. COMPARAISON DES RÉSULTATS

II. Résolution d'une équation hyperbolique

PARTIE 1. ETUDE NUMÉRIQUE

PARTIE 2. ANIMATION

1 SUJET 1

Résolution de problème aux limites de Dirichlet pour une équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites de Dirichlet pour l'équation de chaleur.

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = 4 \sin(2\pi x) - \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0; \quad u(1, t) = t(t - 1) \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

Résoudre ce problème aux limites en utilisant la méthode de séparation des variables.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. Utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$
$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}}, \quad A = 1, x_0 = 2, L = 4$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

2 SUJET 2

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = e^{-0.5x}x(x - 1) \\ u(t, x = 0) = 0; \quad u(t, x = 1) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$$

en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur

$$v_t = v_{xx}$$

2. Déterminer les nouvelles conditions aux limites et initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(t=0, x) = x \sin(\pi x) \\ u_t(t=0, x) = v(x) \\ u(t, x=0) = 0 \\ u(t, x=L) = 0 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales. Considerer deux cas $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.1$
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8.$$

Considerer $v(x) = 0$ et

$$v(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2} \cos(q a (x - x_0)) \cos(q a / 2) + 2 \sin(q a (x - x_0)) \sin(q a / 2) \right)$$

b)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}},$$

$$A = 1, x_0 = 1, \sigma^2 = 0.003, L = 2, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

3 SUJET 3

1. Résolution de problème aux limites mixtes pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2(x+t), & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(0, x) = x^2 \\ u_x(0, t) = t^2; \quad u(1, t) = 2t + 1 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Rechercher la fonction $w(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ en choisissant les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de telle sorte que w vérifie les conditions aux limites du problème
2. Poser $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ Déterminer l'équation de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 1 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1, & 1/4 < x \leq 3/4 \\ 4(1-x), & 3/4 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}}, \quad A_1 = 1, A_2 = 2, x_1 = 3, x_2 = 6, \sigma = 0.003, L = 8$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

4 SUJET 4

Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u + e^{2t}x(x-1), & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0; \quad u(1, t) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$$

en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur

$$v_t = v_{xx} + f(x, t)$$

Préciser la fonction $f(x, t)$.

2. Déterminer les nouvelles conditions aux limites et initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = x \sin(\pi x) \\ u_t(t = 0, x) = v(x) \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, x = L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & 0 < x \leq 1/3 \\ 2, & 1/3 < x \leq 2/3 \\ 6(1-x), & 1/2 < x \leq 2/3 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales. Considerer deux cas $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.1$
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8, v(x) = 0$$

Considerer $v(x) = 0$ et

$$v(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2} \cos(q a (x - x_0)) \cos(q a / 2) + 2 \sin(q a (x - x_0)) \sin(q a / 2) \right)$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}},$$

$$A = 1, x_0 = 1/2, \sigma^2 = 0.003, L = 1, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

5 SUJET 5

1. Résolution de problème aux limites de Neumann pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + t \cdot \cos(\pi x), & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(0, x) = (x - 1)^2 \\ u_x(0, t) = -2; \quad u_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Rechercher la fonction $w(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ en choisissant les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de telle sorte que w vérifie les conditions aux limites du problème
2. Poser $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ Déterminer l'équation de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x) \\ u_t(0, x) = \sin(2\pi x) \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}}, \quad A = 2, x_0 = 1, \sigma = 0.003, L = 2$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

6 SUJET 6

Résolution de problème aux limites de Dirichlet pour une équation de chaleur non homogène

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites de Dirichlet pour l'équation de chaleur.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}x(x-1), & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0; u(1, t) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

Résoudre ce problème aux limites en utilisant la méthode de séparation des variables.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

7 SUJET 7

1. Résolution de problème de Cauchy pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$ en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur $v_t = v_{xx}$
2. Déterminer la nouvelle condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.
5. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
6. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. On prend pour conditions aux limites numériques les asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson ; écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
4. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 2 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{1}{30}(x - 1/3), & 1/3 < x \leq 2/3 \\ \frac{1}{30}(1 - x), & 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}} + A_3 e^{-\frac{(x-x_3)^2}{\sigma_3}},$$

$$A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 1, x_1 = 2, \sigma_1 = 0.002, x_3 = 6, \sigma_3 = 0.003, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, L = 8$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

8 SUJET 8

Résolution de l'équation de chaleur non-homogène

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur.
2. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
3. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. On prend pour conditions aux limites numériques les s asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement.
3. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
4. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
5. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
6. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
7. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

9 SUJET 9

1. Résolution de problème aux limites mixtes pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x - 1, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(0, x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ u(0, t) = 0; \quad u_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur .

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = v(x), & v(x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}},$$

$$A_1 = 1, A_2 = 2, x_1 = 3, x_2 = 6, \sigma = 0.003, L = 8$$

Considerer les deux cas $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.1$.

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

10 SUJET 10

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + 2u + e^x \cdot x \cdot t, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = xe^x \\ u(0, t) = 0; \quad u(1, t) = e \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$$

en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur

$$v_t = v_{xx}$$

2. Déterminer les nouvelles conditions aux limites et initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 3/10x, & 0 < x \leq 1/3 \\ 3(1-x)/20, & 1/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}}, \quad A = 1, x_1 = 1, x_2 = 3, \sigma = 0.003, L = 4$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

11 SUJET 11

1. Résolution de problème de Cauchy pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Montrer que l'équation est parabolique
2. Effectuer le changement d'inconnue $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$ en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur $v_t = v_{xx}$
3. Déterminer la nouvelle condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
4. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur obtenu.
5. En déduire la solution $u(x, t)$.
6. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
7. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$:

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

Les coefficients sont : $\gamma = 0.2316419$, $a_1 = 0.319381530$, $a_2 = -0.356563782$, $a_3 = 1.781477937$, $a_4 = -1.821255978$, $a_5 = 1.330274429$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .

2. On prend pour conditions aux limites numériques les asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson ; écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
4. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.

Pour tracer la solution analytique utiliser la définition de la fonction de repartition N de la loi Normale en Matlab

```
function [f]= N(x)
f=1/2*(1+erf(x/sqrt(2)));
end
```

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = x(1 - x) \\ u_t(0, x) = \sin(\pi x) \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}}$$

$$A_1 = 0.5, A_2 = 1, x_1 = 3, \sigma_1 = 0.002, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, L = 6$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

12 SUJET 12

Résolution de problème de Cauchy pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur ci-dessus.
2. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
3. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. On prend pour conditions aux limites numériques les asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson ; écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
4. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

13 SUJET 13

Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4xu_x + 4x^2u, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2}x(1-x) \\ u(0, t) = 0; u(1, t) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue

$$u(x, t) = e^{\alpha x^2 + \beta t} v(x, t)$$

en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur

$$v_t = v_{xx} + f(x, t)$$

Préciser la fonction $f(x, t)$.

2. Déterminer les nouvelles conditions aux limites et initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) \\ u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}},$$

$$A = 1, x_1 = 1, \sigma_1 = 0.003, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.005, L = 6$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

14 SUJET 14

Résolution de problème aux limites mixtes pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(0, x) = \cos(2\pi x) + x^2 - 2 \\ u_x(0, t) = 0; \quad u(1, t) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur donnée.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

15 SUJET 15

1. Résolution de problème aux limites mixtes pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = x \sin(\pi x) \\ u_x(t, x = 0) = 0; \quad u_x(t, x = 1) = -\pi \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Poser $w(x, t) = x \sin(\pi x)$ puis $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$. Déterminer l'équation de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
2. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
3. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = \sin(\pi x) + 2 \sin(2\pi x) \\ u_t(t = 0, x) = v(x) \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, x = L) = 0 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales. Considerer deux cas $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.1$
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 2, q = 8\pi, L = 8, v(x) = 0$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{(\sigma_1)^2}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{(\sigma_2)^2}},$$

$$A_1 = 1, A_2 = 2, x_1 = 1, (\sigma_1)^2 = 0.003, x_2 = 3, (\sigma_2)^2 = 0.004, L = 5$$

Considerer deux cas $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.1$.

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

16 SUJET 16

1. Résolution de problème aux limites mixtes pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + t, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = \cos(\pi x) \\ u(t, x = 0) = 1; \quad u(t, x = 1) = -1 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur donnée.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = v(x) \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1, & 1/4 < x \leq 3/4 \\ 4(1-x), & 3/4 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t , $v(x) = 0.2$.
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t=0, x) = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(qa(x-x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

Considerer $v(x) = 0$ et

$$v(x) = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2} \cos(qa(x-x_0)) \cos(qa/2) + 2 \sin(qa(x-x_0)) \sin(qa/2) \right)$$

b)

$$u(t=0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}},$$

$$A_1 = 1, A_2 = 2, x_1 = 3, x_2 = 6, \sigma = 0.003, L = 8, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

17 SUJET 17

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + 3x^2/2 - t + tx, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cos(\pi x) + 2 \cos(3\pi x) \\ u_x(t, x = 0) = 1; \quad u_x(t, x = 1) = t \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Rechercher la fonction $w(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ en choisissant les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de telle sorte que w vérifie les conditions aux limites du problème
2. Poser $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ Déterminer l'équations de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(t=0, x) = f(x) \\ u_t(t=0, x) = v(x), & v(x) = 0.2 \\ u(t, x=0) = 0 \\ u(t, x=L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{1}{30}(x - 1/3), & 1/3 < x \leq 2/3 \\ \frac{1}{30}(1 - x), & 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 2, q = 4\pi, L = 8, v(x) = 0$$

b)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}},$$

$$A = 1, x_1 = 2, \sigma_1 = 0.002, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, L = 6, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

18 SUJET 18

1. Résolution d'une équation parabolique sur \mathbb{R}

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + u = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t = 0, x) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x-x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$ en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur $v_t = v_{xx}$
2. Déterminer la nouvelle condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur obtenue.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.
5. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
6. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$:

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

Les coefficients sont : $\gamma = 0.2316419$, $a_1 = 0.319381530$, $a_2 = -0.356563782$, $a_3 = 1.781477937$, $a_4 = -1.821255978$, $a_5 = 1.330274429$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t de sorte que

$$x_i = -L + \Delta x \cdot (i - 1), \quad \Delta x = \frac{2L}{N + 1}, \quad i = 1 : N + 2 \quad L = 5$$

2. On prend pour conditions aux limites numériques les asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson ; écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
4. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.

Pour tracer la solution analytique utiliser la définition de la fonction de repartition N de la loi Normale en Matlab

```
function [f]= N(x)
f=1/2*(1+erf(x/sqrt(2)));
end
```

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = f(x) \\ u_t(t = 0, x) = v(x), & v(x) = 0 \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, x = L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 3/10 \cdot x, & 0 < x \leq 1/3 \\ 3(1-x)/20, & 1/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 4]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.

3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :
 - a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 2, q = 4\pi, L = 8$$

Considerer $v(x) = 0$ et

$$v(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x - x_0)^2 a^2}{2\sigma^2} \cos(q a (x - x_0)) \cos(q a/2) + 2 \sin(q a (x - x_0)) \sin(q a/2) \right)$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}},$$

$$A = 1, A_2 = 2, x_1 = 1, \sigma_1 = 0.003, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.005, L = 6, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

19 SUJET 19

1. Résolution de problème de Cauchy pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t + 2t^2 u = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t = 0, x) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ x + e^{-x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue $u(x, t) = e^{-2t^3/3} v(x, t)$
2. Déterminer la nouvelle condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.
5. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
6. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$:

```
function [f]= N(x)
f=1/2*(1+erf(x/sqrt(2)));
end
```

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t de sorte que

$$x_i = -L + \Delta x \cdot (i - 1), \quad \Delta x = \frac{2L}{N + 1}, \quad i = 1 : N + 2, \quad L = 5$$

2. On prend pour conditions aux limites numériques les asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.

4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson ; écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
6. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
7. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
Pour tracer la solution analytique utiliser la définition de la fonction de repartition N de la loi Normale en Matlab

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

Les coefficients sont : $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(t = 0, x) = f(x) \\ u_t(t = 0, x) = v(x), & v(x) = 0 \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, x = L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ -(x-2)^2/2, & 1 < x \leq 3 \\ 4-x, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 4]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 4$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 3, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8, v(x) = 0$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}} + A_3 e^{-\frac{(x-x_3)^2}{\sigma_3}}$$

$$A_1 = 0.5, A_2 = 1, x_1 = 2, \sigma_1 = 0.003, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, x_3 = 6, L = 8, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

20 SUJET 20

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 - e^{-t}, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = 1 \\ u_x(t, x = 0) = 1; \quad u_x(t, x = 1) = e^{-t} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Rechercher la fonction $w(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ en choisissant les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de telle sorte que w vérifie les conditions aux limites du problème
2. Poser $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ Déterminer l'équations de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = v(x), v(x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1, & 1/4 < x \leq 3/4 \\ 4(1-x), & 3/4 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t=0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 8\pi, L = 8$$

b)

$$u(t=0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}},$$

$$A_1 = 1, A_2 = 2, x_1 = 3, x_2 = 6, \sigma = 0.003, L = 8$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

21 SUJET 21

1. Résolution de problème de Cauchy pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t + 4u_x - 2u = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} e^{2x} \cdot (1 - x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ e^{2x} \cdot (1 + x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$ en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur $v_t = v_{xx}$
2. Déterminer la nouvelle condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.
5. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
6. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

Les coefficients sont : $\gamma = 0.2316419$, $a_1 = 0.319381530$, $a_2 = -0.356563782$, $a_3 = 1.781477937$, $a_4 = -1.821255978$, $a_5 = 1.330274429$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t de sorte que

$$x_i = -L + \Delta x \cdot i, \quad \Delta x = \frac{2L}{N+1}, \quad i = 0 : N+1 \quad L = 5$$

2. On prend pour conditions aux limites numériques les asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson ; écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
4. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 2 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{1}{30}(x - 1/3), & 1/3 < x \leq 2/3 \\ \frac{1}{30}(1 - x), & 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}}, \quad A = 1, x_1 = 2, \sigma_1 = 0.002, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, L = 6$$

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

22 SUJET 22

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2xu_x + x^2u + (\cos(\pi x) + 2x - 1)e^{-x^2/2}, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = e^{-x^2/2}x(1 - x) \\ u(t, x = 0) = 0; \quad u(t, x = 1) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue

$$u(x, t) = e^{\alpha x^2 + \beta t} v(x, t)$$

en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur

$$v_t = v_{xx} + f(x, t)$$

Préciser la fonction $f(x, t)$.

2. Déterminer les nouvelles conditions aux limites et initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(t = 0, x) = f(x) \\ u_t(t = 0, x) = v(x), & v(x) = 0 \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, x = L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{1}{30}(x - 1/3), & 1/3 < x \leq 2/3 \\ \frac{1}{30}(1 - x), & 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

Considerer deux cas : $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.3$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}} + A_3 e^{-\frac{(x-x_3)^2}{\sigma_3}},$$

$$A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 1, x_1 = 2, \sigma_1 = 0.002, x_3 = 6, \sigma_3 = 0.003, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, L = 8, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

23 SUJET 23

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 1 - \frac{1}{2}x^2, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = \frac{3}{2}x^2 \\ u_x(t, x = 0) = t; \quad u_x(t, x = 1) = 1 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Rechercher la fonction $w(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ en choisissant les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de telle sorte que w vérifie les conditions aux limites du problème
2. Poser $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ Déterminer l'équations de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x) \\ u_t(t = 0, x) = v(x) \\ u(t, x = 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

Considerer deux cas : $v(x) = 0$ et $v(x) = \sin(2\pi x)$.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.6, a = 2, q = 4\pi, L = 8$$

Considerer $v(x) = 0$ et

$$v(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{(x - x_0)^2 a^2}{2\sigma^2} \cos(q a (x - x_0)) \cos(q a / 2) + 2 \sin(q a (x - x_0)) \sin(q a / 2) \right)$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}}, \quad A = 3, x_0 = 1, \sigma = 0.003, L = 2, v(x) = 0.1$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

24 SUJET 24

1. Résolution de problème aux limites mixtes pour l'équation de chaleur

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xt - 1, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ u(t, x = 0) = 0; \quad u_x(t, x = 1) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur .

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = v(x), & v(x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2, & 1/3 < x \leq 2/3 \\ 6(1-x), & 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}},$$

$$A = 1, x_1 = 2, \sigma_1 = 0.002, x_2 = 4, \sigma_2 = 0.006, L = 6, v(x) = 0$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-y_1)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0)) + A e^{-\frac{(x-y_2)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - y_2))$$

$$A = 5, y_1 = 4, y_2 = 8, \sigma^2 = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 12, v(x) = 0$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

25 SUJET 25

1. Résolution de problème de Cauchy pour l'équation de chaleur non-homogène

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t = 0, x) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de chaleur.
2. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
3. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$:

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

Les coefficients sont : $\gamma = 0.2316419$, $a_1 = 0.319381530$, $a_2 = -0.356563782$, $a_3 = 1.781477937$, $a_4 = -1.821255978$, $a_5 = 1.330274429$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t de sorte que

$$x_i = -L + \Delta x \cdot (i - 1), \quad \Delta x = \frac{2L}{N + 1}, \quad i = 1 : N + 2, \quad L = 5$$

2. On prend pour conditions aux limites numériques les s asymptotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement.
3. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

4. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
5. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
7. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
8. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
9. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.

Pour tracer la solution analytique utiliser la définition de la fonction de repartition N de la loi Normale en Matlab

```
function [f]= N(x)
f=1/2*(1+erf(x/sqrt(2)));
end
```

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) \\ u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 4]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

6. Animer la solution

7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$
$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 8\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}},$$
$$A_1 = 1, A_2 = 2, x_1 = 3, x_2 = 6, \sigma = 0.003, L = 8$$

Considerer les deux cas $v(x) = 0$ et $v(x) = 0.1$.

Imposer les conditions aux limites périodiques et animer les solutions pour les deux paquets.

26 SUJET 26

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xe^{-t}, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = 1 - x \\ u_x(t, x = 0) = -1; \quad u(t, x = 1) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Conditions aux limites non homogènes. Rechercher la fonction $w(x, t) = \alpha(t)x + \beta(t)x^2$ en choisissant les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de telle sorte que w vérifie les conditions aux limites du problème
2. Poser $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ Déterminer l'équation de chaleur avec second membre et la condition initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in R, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 3/4x, & 0 < x \leq 4/9 \\ 1/4, & 4/9 < x \leq 7/9 \\ 3(1-x)/2, & 7/9 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 6, x_0 = 4, \sigma = 0.4, a = 1.5, q = 6\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma_1}} + A_2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma_2}},$$

$$A_1 = 1, A_2 = 1.5, x_1 = 2, x_2 = 3.5, \sigma_1 = 0.003, \sigma_2 = 0.005, L = 5$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

27 SUJET 27

1. Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & x \in]0, 1[, t > 0 \\ u(t = 0, x) = e^{-\frac{x}{2}} x(x - 1) \\ u(t, x = 0) = t^2 e^{-\frac{t}{4}} \\ u(t, x = 1) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Effectuer le changement d'inconnue

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$$

en choisissant les coefficients α et β de telle sorte que v soit solution de l'équation de chaleur

$$v_t = v_{xx}$$

2. Déterminer les nouvelles conditions aux limites et initiale pour la nouvelle inconnue v .
3. Résoudre le problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenu.
4. En déduire la solution $u(x, t)$.

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode d'Euler.
4. Programmer et visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
5. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson.
6. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
7. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
8. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.

2. Résolution numérique d'une équation hyperbolique

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0 \\ u(t, L) = 0 \end{cases}$$

où

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 2/3 \\ 6(1-x), & 2/3 < x \leq 1 \end{cases}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T] = [0, 5]$ avec T paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$, $L = 1$ de pas $\Delta x = 0.01$ pour la variable x et de pas $\Delta t = 0.0001$ pour la variable t .
2. Discrétiser les conditions initiales.
3. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode explicite
4. Écrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
5. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
6. Animer la solution
7. Considerer la propagation d'un paquet d'onde. Les paquets sont modélisé par deux fonctions suivantes :

a)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2 a^2}{2\sigma^2}} \cos(q a (x - x_0))$$

$$A = 5, x_0 = 4, \sigma = 0.5, a = 1, q = 4\pi, L = 8$$

b)

$$u(t = 0, x) = A e^{-\frac{(x-x_1)^2}{\sigma}} + A e^{-\frac{(x-x_2)^2}{\sigma}},$$

$$A = 1, x_1 = 1, x_2 = 3, \sigma = 0.003, L = 4$$

Imposer les conditions aux limites

a) périodiques

b) fixes

et animer les solutions pour les deux paquets.

28 SUJET 28

Résolution de l'équation de chaleur sur \mathbb{R}

L'objectif de ce projet est d'étudier la solution du problème aux limites pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(t = 0, x) = g(x) \end{cases}$$

où

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ e^{-x^2/2} & \text{sinon } x > 1 \end{cases}$$

PARTIE I. ETUDE ANALYTIQUE

1. Résoudre l'équation de chaleur sur \mathbb{R}
2. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow +\infty$
3. Donner l'asymptote de la solution $u(x, t)$ quand $x \rightarrow -\infty$

PARTIE II. RÉOLUTION NUMÉRIQUE.

1. Pour résoudre le problème numériquement, on va limiter la variation du temps à un intervalle $[0, T]$ avec T paramètre du programme, et la variation de x à l'intervalle $[-L, L]$ avec L paramètre du programme. Définir une grille sur le rectangle $[-L, L] \times [0, T]$ de pas Δx pour la variable x et de pas Δt pour la variable t .
2. On prend pour conditions aux limites numériques les s asypmtotes de la solution analytique en $\pm\infty$ en remplaçant éventuellement x par L et $-L$ respectivement.
3. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
4. Discrétiser l'équation à l'aide de la méthode de Crank-Nicolson
5. Ecrire les équations aux différences finies obtenues sous forme matricielle.
6. utiliser l'algorithme de Thomas pour trouver la solution de système d'équations obtenu à chaque itération.
7. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

PARTIE III. COMPARAISON DES RÉSULTATS

1. Tracez la fonction solution analytique obtenue dans la **partie I** aux mêmes instants de temps et comparez la avec les solutions numériques obtenues dans les **parties II et III**.
2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP (**partie II**) évaluer l'erreur maximale.