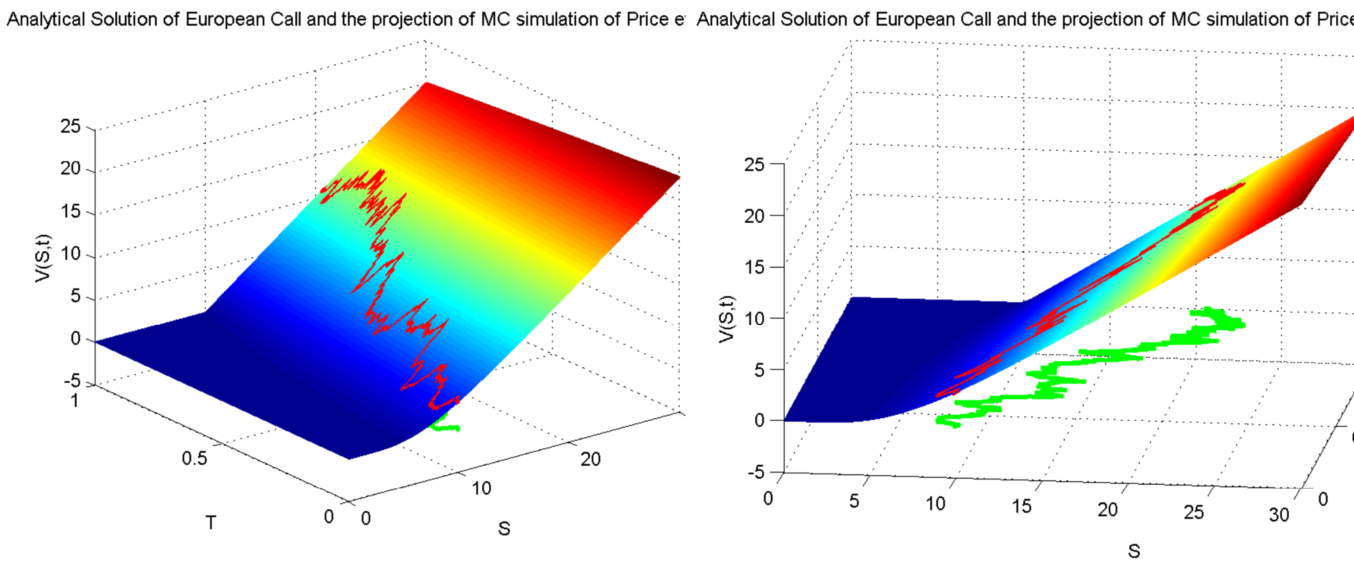
E.I.S.T.I. **Spécialité "Génie Mathématique"**

PROJETS DU PARCOURS "MATH FINANCE"

Irina Kortchemski



1. Résolution analytique de l'équation de Black et Scholes.

2. Evaluation du prix des Options Exotiques par la méthode aux Différences Finies (méthode de Crank-Nicolson) et par la méthode de Monté-Carlo.

3. Calcul des Grecques des Options Exotiques par Morté-Carlo et par Malliavin.

4. Estimation de la volatilité historique.

5. Interface graphique et comparaison des résultats.

1 Projet 1

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire "Cash-or-nothing" (Call).

Le but du Projet 1 est l'évaluation numérique du prix d'une option européenne d'achat "Cash-or-nothing".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale qui s'appelle "cash-or-nothing" s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = H(S - K) \end{cases} \tag{1}$$

Ici H est la fonction de Heaviside.

La fonction $V(S,t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes s'écrit:

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N+1 \\ n = 0, 1, 2, ...M+1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{2}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. montrer les conditions aux limites:

$$\begin{cases} V(S=0,t) = 0 \\ V(S \to \infty, t) = e^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{3}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{4}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S=0$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)=0$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0,t)=0 \\ V(L,t)=e^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{5}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma=\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L=20, \quad T=0.5 \\ K=10, \quad r=0.1, \quad \sigma=0.5 \\ N=100, \quad \Delta t=10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t),\ t\in[0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt+\sigma SdW(t), \quad S(0)=S_0 \tag{6}$$

où (r,σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t)=S(0)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t=0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0,0)=e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0)=S_0] \tag{7}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T)=S(0)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0)=\frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{8}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{9}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{10}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0 \sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par DF. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$ par DF.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{11}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0, T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{12}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{13}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\, \sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:
   - pas temporel dt
   - pas spatial dS
   - limite spatiale L
   - Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

   Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.
5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

Travail à faire

1. Tracez la fonction $V(S,0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1+\gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

2 Projet 2

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire "Cash-or-nothing" (Put)

Le but du Projet 2 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option européenne de vente "Cash-or-nothing".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale qui s'appelle "cash-or-nothing" s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = H(K - S) \end{cases} \tag{14}$$

Ici H est la fonction de Heaviside.

La fonction $V(S,t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes s'écrit:

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \quad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{15}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. M.q. les conditions aux limites sont:

$$\begin{cases} V(t, S = 0) = e^{-r(T-t)} \\ V(t, S \to \infty) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite d'Euler et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{17}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = L$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(L,t) = 0$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:
$$\left\{ \begin{array}{c} V(0,t) = e^{-r(T-t)} \\ \frac{\partial V}{\partial S}(L,t) = 0 \end{array} \right. \tag{18}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:
$$\left\{ \begin{array}{l} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{array} \right.$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:
$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{19}$$
où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:
$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{20}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{21}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{22}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre. 3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{23}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{24}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0, T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{25}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{26}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

3 Projet 3

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option européenne avec dividende.

Le but du Projet 3 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option européenne d'achat avec dividende.

On considère un actif S qui au cours de son évolution paye des dividendes à taux constant D. L'équation de Black et Scholes qui décrit le prix d'une option européenne d'achat sur un tel actif est de la forme: s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + (r-D)S\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S,t=T) = \Lambda(S) = max(S-K,0) \end{cases} \tag{27}$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra acheter au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t=0$ de l'option d'achat de prix d'exercice K à l'échéance $T>0$, et d'actif S en $t=0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt et D le dividende.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_j = \frac{\ln(S/K) + ((r-D) + (-1)^j\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad j=1,2$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \quad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{28}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - (r - D)S_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. M.q. es conditions aux limites sont:

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(S, t) \sim Se^{-D(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}, \quad S \to +\infty \end{cases} \tag{29}$$

2. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0,t) = 0 \\ V(L,t) = Le^{-D(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{30}$$

3. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

4. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{31}$$

5. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

6. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

7. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

8. Imposer en $S = 0$ la conditions à limite de Neumann

$$\frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0,$$

discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0 \\ V(L,t) = Le^{-D(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{32}$$

9. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ D = 0.02 \ \ et \ \ D = 0.4 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = (r - D)Sdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{33}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{34}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{35}$$

Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{36}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre. Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{37}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$**. Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple** $S(T)$ **et** W_T **on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = (r - D)S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{38}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - D - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - D - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - D - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - D - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{39}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{40}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\, \sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".

2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:

   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0

3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.

4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

   - pas temporel dt
   - pas spatial dS
   - limite spatiale L
   - Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

   Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1+\gamma x}$$

Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

4 Projet 4

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option de type put européen avec dividende.

Le but du Projet 4 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option européenne de vente avec dividende.

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + (r-D)S\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t=T) = \Lambda(S) = max(K-S, 0) \end{cases} \tag{41}$$

La fonction $V(S,t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt et D le dividende.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = -Se^{-D(T-t)}N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + ((r-D) \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie I. Solution analytique.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$
\left\{
\begin{array}{l}
i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\
n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\
\Delta S = \dfrac{L}{N + 1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M + 1} \\
V(t_n, S_i) \equiv V_i^n
\end{array}
\right. \tag{42}
$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$
M_{BS}^n = rV_i^n - (r - D)S_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}
$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$
\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),
$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$
\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},
$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$
\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).
$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
V(0, t) = 0 \\
V(L, t) = Le^{-D(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}
\end{array}
\right. \tag{43}
$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite d'Euler et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{44}$$
4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.
5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
7. Comparer à $t = 0$ les solutions pour $D = 0.4$ et $D = 0.02$.
8. Imposer en $S = 0$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(0, t) = 0$, discrétiser cette condition
9. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ D = 0.02 \;\; et \;\; D = 0.4 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{45}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t) \right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t = 0) = S_0] \tag{46}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0, 1) \right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0)=\frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{47}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}\sim\frac{V(S+h)-V(S)}{h}$$

au moment de temps $t=0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0)=e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T))-\Lambda(S(T))}{h}] \tag{48}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de S_0+h:

$$S^h(t)=(S(0)+h)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre. 3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma=\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sim\frac{V(S+h)-2V(S)+V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t=0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0)=e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T))-2\Lambda(S(T))+\Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{49}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de S_0+h:

$$S^{h_1}(t)=(S(0)+h)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de S_0-h:

$$S^{h_2}(t)=(S(0)-h)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0,0)=e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0,0)=e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0 \sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0 \sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{50}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{51}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{52}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

5 Projet 5

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire de type Supershare (Call).

Le but du Projet 5 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option binaire "Supershare".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale qui s'appelle "supershare" s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = \frac{1}{d}(H(S - K) - H(S - K - d)) \end{cases} \tag{53}$$

Ici H est la fonction de Heavyside, d est un prix fixe. La composition de deux fonctions de Heavyside modelise la fonction Delta de Dirac.

La fonction $V(S, t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S, t) = \frac{1}{d} e^{-r(T-t)} [N(d_2) - N(d_2 - \frac{\ln(1 + \frac{d}{K})}{\sigma\sqrt{T - t}})]$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie I. Solution analytique.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{54}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(L, t) = 0 \end{cases} \tag{55}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{56}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0 \\ V(L,t) = 0 \end{cases} \tag{57}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 40, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \\ d = 4 \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{58}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{59}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{60}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{61}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{62}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0)-h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \dots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t = 0) = S_0 \tag{63}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0, T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{64}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{65}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

6 Projet 6

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire "Asset-or-nothing" (Put)

Le but du Projet 6 est est l'évaluation numérique et analytique du prix de vente d'une option binaire "Asset-or-nothing".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale qui s'appelle " asset-or-nothing" s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = SH(K - S) \end{cases} \tag{66}$$

Ici H est la fonction de Heaviside.

La fonction $V(S,t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = S - SN(d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{67}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(L, t) = 0 \end{cases} \tag{68}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{69}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0 \\ V(L,t) = 0 \end{cases} \tag{70}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 40, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{71}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

Nous admettons que la solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{72}$$

Delta d'une option européenne $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h)-V(S)}{h}$ au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{73}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Gamma = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{74}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

Les objectifs de cette partie sont:

1. calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela vous allez simuler un grand nombre de chemins d'évolution de l'actif $S(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$, en partant toujours de S_0. Pour chaque chemin on ne retient que la valeur finale à terme $S(T)$. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$.

2. calculer par simulation une estimation de Δ. Pour cela vous simulez un grand nombre de chemins - couples d'évolution des actifs $S(t)$ et $S^h(t)$. Pour chaque couple de chemins on utilise le même mouvement brownien $W(t)$. Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. calculer de façon similaire par simulation une estimation Γ.

4. calculer de façon similaire par simulation une estimation Θ.

Travail à faire

1. On choisit la même discrétisation $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_{M+1} = T$ de l'intervalle $[0,T]$ que dans la partie 2. Simuler un grand nombre N_{MC} de chemins d'un mouvement brownien $W(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$. Chaque chemin est insi une suite $W_k(t_i),\ i = 0, \ldots M+1,\ k = 1 \ldots N_{MC}$.

2. Soit S_0 le prix de l'actif S au moment de départ de l'option (à $t = 0$). Pour chaque chemin simulé de mouvement brownien $\{W_k(t_i)\}_{i=1}^{M+1}$ évaluer le chemin correspondant de l'actif sous-jacent $\{S_k(t_i)\}_{i=1}^{M+1}$, ayant pour condition initiale S_0. Utiliser pour cela la formule (211).

3. Soient $S_k(T),\ k = 1, \ldots, N_{MC}$ les valeurs finales de l'actif obtenues sur tous les chemins simulés. Calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S_k(T)),\ k = 1, \ldots, N_{MC}$ et en déduire une estimation du prix de l'option.

4. Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif: $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ et en prenant $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. Réaliser le graphe de $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$.

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{75}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{76}$$

et de variance

$$V[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{77}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_{n-m} et t_n

$$S(t_{n-m}), S(t_{n-m+1}), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$a = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U_{n+1-i}, \qquad b^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(U_{n+1-i} - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $V[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \frac{b}{\sqrt{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} U_{n+1-i}^2 - \frac{1}{m(m-1)}(\sum_{i=1}^{m} U_{n+1-i})^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'evolution de l'action. Estimer sa variance et comparer avec la valeur exacte.
2. Verifier que la valeur de la variance estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2m}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

PARTIE V. INTERFACE GRAPHIQUE

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".

2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:
   - pas temporel dt
   - pas spatial dS
   - limite spatiale L
   - Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

   Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.
5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.
6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

   $$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

   $$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

7 Projet 7

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire "Asset-or-nothing" (Call)

Le but du Projet 7 est est l'évaluation numérique et analytique du prix d'achat d'une option binaire "Asset-or-nothing".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale qui s'appelle " asset-or-nothing" s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = SH(S - K) \end{cases} \tag{78}$$

Ici H est la fonction de Heaviside.

La fonction $V(S,t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = SN(d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \quad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{79}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(L, t) = L \end{cases} \tag{80}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{81}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = L$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(L, t) = 1$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:
$$\begin{cases} V(0,t) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial S}(L,t) = 1 \end{cases} \tag{82}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:
$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t), \ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:
$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{83}$$
où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:
$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t = 0) = S_0] \tag{84}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{85}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{86}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3)Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{87}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0)-h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{88}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0,\ldots,n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{89}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{90}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S,0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1+\gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

8 Projet 8

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire "Gap" (Call)

Le but du Projet 8 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'achat d'une option binaire "Gap".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'ecrit de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = (S - Y)H(S - K) \end{cases} \tag{91}$$

Ici H est la fonction de Heaviside, Y est un prix fixe.

La fonction $V(S,t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ye^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \quad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{92}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(L, t) = L - Ye^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{93}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{94}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions à limite de Neumann $\frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:
$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0 \\ V(L,t) = L - Ye^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{95}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:
$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5, \quad Y = 6 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:
$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{96}$$
où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:
$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{97}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{98}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{99}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre. 3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{100}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{101}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{102}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{103}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

9 Projet 9

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option binaire "Gap" (Put)

Le but du Projet 9 est l'évaluation numérique et analytique du prix de vente d'une option binaire "Gap".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'ecrit de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = (Y - S)H(K - S) \end{cases} \tag{104}$$

Ici H est la fonction de Heaviside.

On choisit Y de sorte que le prix de l'option est nul à $t = 0$ pour une valeur particulière, fixe de l'action $S_0 = S_0^*$

$$V(0, S_0^*) = 0 \;\Rightarrow\; Y = e^{rT} S_0^* \frac{N(-\tilde{d}_1)}{N(-\tilde{d}_2)} =$$

Les valeurs de $\tilde{d}_1$ et $\tilde{d}_2$ sont définies par les expressions :

$$\tilde{d}_{1,2} = \frac{\ln(S_0^*/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

La fonction $V(S, t)$ donne le prix d'une au moment de temps t en fonction du prix S de l'actif sousjacent S. On note σ la volatilité de l'action et r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S, t) = Ye^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N+1 \\ n = 0, 1, 2, ...M+1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{105}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:
$$\begin{cases} V(0,t) = Ye^{-r(T-t)} \\ V(L,t) = 0 \end{cases} \tag{106}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite d'Euler et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{107}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = L$ la conditions à limite de Neumann
$$\frac{\partial V}{\partial S}(L,t) = 0,$$
discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:
$$\begin{cases} V(0,t) = Ye^{-r(T-t)} \\ \frac{\partial V}{\partial S}(L,t) = 0 \end{cases} \tag{108}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:
$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5, \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad S_0^* = 7, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:
$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{109}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\ t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{110}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{111}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{112}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{113}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0)-h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \dots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0, 1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple** $S(T)$ **et** W_T **on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0, 1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0 \sigma T}]$$

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t)$, $t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t = 0) = S_0 \tag{114}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0, T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t, \ i = 0, \dots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0, 1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0, 1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{115}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \qquad (116)$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:
   - pas temporel dt
   - pas spatial dS
   - limite spatiale L
   - Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

   Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.
5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.
6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

10 Projet 10

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option de Package: Collars.

Le but du Projet 10 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option Collars.

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = min(max(S, K_1), K_2) \end{cases} \tag{117}$$

L'équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option de deux achats (ou deux call) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra acheter au deux prix K_1 et K_2 dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t = 0$ de l'option d'achat et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

La fonction pay-off peut être représentée sous la forme:

$$\Lambda(S) = K_1 + max(S - K_1, 0) - max(S - K_2, 0), \qquad 0 < K_1 < K_2$$

On peut en déduire que cette option peut être représentée à l'aide de deux options d'achat standard.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = K_1 e^{-r(T-t)} + S(N(d_1) - N(\tilde{d}_1)) - e^{-r(T-t)}(K_1 N(d_2) - K_2 N(\tilde{d}_2))$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K_1) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\tilde{d}_{1,2} = \frac{\ln(S/K_2) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{118}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0,t) = K_1 e^{-r(T-t)} \\ V(L,t) = K_2 e^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{119}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{120}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions aux limites de Neumann $\quad ds\frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0$, discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0 \\ V(L,t) = K_2 e^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{121}$$

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K_1 = 2, \quad K_2 = 7, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{122}$$

où (r,σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t = 0) = S_0] \tag{123}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0, 1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0, 1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0, 1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0, 1)\right)\right)\right] \tag{124}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S + h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{125}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S + h) - 2V(S) + V(S - h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{126}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$**. Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{127}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{128}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{129}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.
6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

11 PROJET 11

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option de Package: Break forwards.

Le but du Projet 11 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option Break forwards.

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = max(S, F) - K \end{cases} \tag{130}$$

L'équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement S_0 et qu'on pourra acheter au prix F dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t = 0$ de l'option d'achat de prix d'exercice F à l'échéance $T > 0$, et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

PARTIE I. SOLUTION ANALYTIQUE.

Soit

$$F = S_0^* e^{rT}.$$

S_0^* est une valeur particulière, fixe. On choisit K de sorte que le prix de l'option soit nul à $t = 0$.

On a:

$$V(0, S_0^*) = 0 \;\Rightarrow\; K = e^{rT} S_0^* (1 + N(\tilde{d}_1) - N(\tilde{d}_2))$$

avec

$$\tilde{d}_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

La fonction pay-off peut être représentée de la forme:

$$\Lambda(S) = max(S - F, 0) + F - K, \qquad K > F$$

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = (F - K)e^{-r(T-t)} + SN(d_1) - Fe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/F) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{131}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0,t) = (F-K)e^{-r(T-t)} \\ V(L,t) = L - Ke^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{132}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{133}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5, \quad S_0^* = 7 \\ r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{134}$$

où (r,σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{135}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{136}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{137}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{138}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0)-h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{139}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \dots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{140}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{141}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - $S0$
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

12 Projet 12

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option Barrière "Down-and-out Call"

Le but du Projet 12 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option Barrière "Down-and-out Call".

Une option à barrière est caracterisée par une condition sur son existence. "Down-and-out" option termine son existence si le prix d'une action $S(t)$ tombe au-dessous d'un prix barrière B. A $S = B$ le prix de call est nul.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0, \quad B < S \\ V(B,t) = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = max(S - K, 0) \end{cases} \tag{142}$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra vendre au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t = 0$ d'option d'achat de prix d'exercice K à l'échéance $T > 0$ à condition que $S(t) > B$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Etudions le cas $K > B$.

1. Effectuer le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x = \ln\left(\dfrac{S}{B}\right) \\ \tau = \dfrac{\sigma^2}{2}(T - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = Be^x \\ t = T - \dfrac{2}{\sigma^2}\tau \end{cases}$$

Notons

$$v(x,\tau) = V(S(x), t(\tau)) \quad \Leftrightarrow \quad V(S,t) = v(x(S), \tau(t)) = v\left(\ln\left(\frac{S}{B}\right), \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)$$

Montrer que après ce changement de variables l'équation devient:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv(\tau, x) = 0 \tag{143}$$

Préciser la constante k.

2. **Changement d'inconnue.** On souhaite éliminer dans cette équation les termes v_x et v. Pour cela on cherchera $v(x,\tau)$ sous la forme:

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x,\tau)$$

Choisir les constantes α et β de telle sorte que l'équation différentielle pour $u(x,\tau)$ soit la suivante:

$$u_\tau = u_{xx}, \; x > 0, \quad \tau \in]0,T] \tag{144}$$

3. **Nouvelles conditions initiale et aux limites.**

Montrer que $u(x,\tau)$ vérifie les conditions initiale et aux limites suivantes

$$\begin{cases} u(x,0) = g(x), \; x > 0 \\ u(0,\tau) = 0, \; \tau \in [0,T] \end{cases}$$

Préciser la fonction $g(x)$.

4. On obtient ainsi un problème pour l'équation de chaleur sur un demi-axe:

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx}, \; x > 0, \quad \tau \in]0,T] \\ u(x,0) = g(x), \; x > 0 \\ u(0,\tau) = 0, \; \tau \in [0,T] \end{cases}$$

La solution de ce problème peut s'écrire à l'aide de la fonction de Green pour l'équation de chaleur sur le demi-axe

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} k(x,y,t) g(y) dy$$

où $k(x,y,t)$ est la fonction de Green du problème définie comme suit:

$$k(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right)$$

En utilisant cette représentation, évaluer la solution $u(x,t)$ à partir de la condition initiale $g(x)$.

5. En faisant les changements de variables inverses montrer que l'on peut présenter le prix de l'option down-at-out comme suit:

$$V(S,t) = V_{call}(S,t) - V_1(S,t)$$

où

$$V_{call}(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

est le prix d'une option d'achat européenne et où

$$V_1(S,t) = \left(\frac{S}{B}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} V_{call}\left(\frac{B^2}{S}, t\right)$$

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N+1 \\ n = 0, 1, 2, ...M+1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{145}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(B,t) = 0, & S \leq B \\ V(L,t) = L - Ke^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{146}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite d'Euler et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n+1} = K_i^n, \tag{147}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad B = 6, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{148}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{149}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \mathbb{N}(0,1) \right),$$

où $\mathbb{N}(0, 1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0, 1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda \left(S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \mathbb{N}^{(k)}(0,1) \right) \right) \right] \tag{150}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{151}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right)$$

et h est un petit nombre.

3)Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{152}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

Le prix de l'option dépand du chemin d'évolution de l'actif sous-jacent. On ne peut donc pas utiliser la formule (211) et on doit simuler chaque chemin d'évolution de l'actif sous-jacent.

1. On choisit la même discrétisation $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_{M+1} = T$ de l'intervalle $[0, T]$ que dans la partie 2. Simuler un grand nombre N_{MC} de chemins de l'actif sous-jacent $\{S_k(t_i)\}_{i=1}^{M+1}$ sur l'intervalle $[0, T]$. Chaque chemin est ainsi une suite $S_k(t_i),\ i = 0, \ldots M+1,\ k = 1 \ldots N_{MC}$.

2. Soit S_0 le prix de l'actif S au moment de départ de l'option (à $t = 0$). Evaluer chaque k le chemin de l'actif sous-jacent $\{S_k(t_i)\}_{i=0}^{M+1}$, ayant pour condition initiale S_0.

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathbb{N}^{(i)}(0,1)\right)$$

Vérifier à chaque instant t_i si $S(t_{i+1})$ touche la Barrière B. Si

$$S(t_{i+1}) \geq B$$

on arrête le chemin et on donne la valeur zero au prix de l'option. Pour ce chemin donc $\Lambda(S_k(T)) = 0$

3. Soient $S_k(T),\ k = 1, \ldots, N_{MC}$ les valeurs finales de l'actif obtenues sur tous les chemins simulés. Calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S_k(T)),\ k = 1, \ldots, N_{MC}$ et en déduire une estimation du prix de l'option par la formule (210).

4. Calculer par simulation une estimation de Delta $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre $(N_{MC} \cdot M)$ de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(t_i)$ et $S^h(t_i)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}^{(i)}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

   tenant compte que $S(t_{i+1})$ doit être plus petit que B.

5. Calculer de façon similaire par simulation une estimation de Gamma $\Gamma(S_0, 0)$.

6. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation de Theta $\Theta(S_0, 0)$.

7. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$**. Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

8. Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif: $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ et en prenant $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. Réaliser le graphe de $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$.

9. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **On simule en parallèle les trajectoires completes de $S(t_i)$ et $W(t_i)$.** Ensuite on utilise les couples $S(T)$ et W_T de chaque trajectoire qui ne touche pas la Barrière et on évalue la moyenne empirique de

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0 \sigma T}]$$

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t = 0) = S_0 \tag{153}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0, T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ \ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{154}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{155}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:
   - pas temporel dt
   - pas spatial dS
   - limite spatiale L
   - Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

   Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

   $$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

   $$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

   $$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

13 Projet 13

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option de Package: Pay-later.

Le but du Projet 13 est l'évaluation numérique et analytique du prix d'une option "Pay-later".

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = max(S - K, 0) - YH(S - K) \end{array} \right. \tag{156}$$

L'équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option composée d'un contrat d'achat (ou call), d'un contrat d'achat binaire. Une action qui vaut initialement S_0 on pourra acheter au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t = 0$ de l'option composée. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

On choisit Y de sorte que que le prix de l'option soit nul à $t = 0$ pour une valeur particulière, fixe de $S_0 = S_0^*$:

Alors

$$V(0, S_0^*) = 0 \;\Rightarrow\; Y = S_0^* e^{rT} N(\tilde{d}_1)/N(\tilde{d}_2) - K$$

Ici S_0^* est une valeur particulière, fixe.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = SN(d_1) - (K + Y)e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\tilde{d}_{1,2} = \frac{\ln(S_0^*/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N+1 \\ n = 0, 1, 2, ...M+1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{157}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0,t) = 0 \\ V(L,t) = L - (K+Y)e^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{158}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :

$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{159}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions aux limites de Neumann

$$\frac{\partial V}{\partial S}(0,t) = 0,$$

discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites.

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5, \quad S_0^* = 15 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{160}$$

où (r,σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{161}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{162}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{163}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{164}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif: $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ et en prenant $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. Réaliser les graphes de $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$**

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0,0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$

$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T}-W_T-\frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t\in[0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_tdt+\sigma S_tdW_t, \quad S(t=0)=S_0 \tag{165}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r=\mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t)=S_0\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i=i\Delta t,\ i=0,\ldots,n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i=S(t_i)$

$$S_{i+1}=S_i\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t+\sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i=ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)=(r-\frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t+\sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i]=(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{166}$$

et de variance

$$Var[U_i]=\sigma^2\Delta t. \tag{167}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma=\sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T

- Taux sans risque r
- Volatilité σ
- $S0$

3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.

4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

   - pas temporel dt
   - pas spatial dS
   - limite spatiale L
   - Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

   Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

14 Projet 14

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option Power Symétrique.

Le but du Projet 14 est est l'évaluation numérique et analytique du prix d'achat d'une option Power symétrique. Call

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = (max(0, (S - K)))^2 \end{cases} \tag{168}$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra acheter au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t = 0$ de call de prix d'exercice K à l'échéance $T > 0$, et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = S^2 e^{(\sigma^2 + r)(T-t)} N(d_1 + \sigma\sqrt{T-t}) + K(Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - 2SN(d_1))$$

$$d_{12} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{169}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0,t) = 0 \\ V(L,t) = L^2 e^{(\sigma^2+r)(T-t)} - 2KL + K^2 e^{-r(T-t)} \end{cases} \tag{170}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{171}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions aux limites de Neumann
$$\frac{\partial V}{\partial S}(0, t) = 0,$$
discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{172}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t = 0) = S_0] \tag{173}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{174}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{175}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{176}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0)-h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$
$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)
2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple** $S(T)$ **et** $S^h(T)$ **on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$
3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.
4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.
5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. **Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$
6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple** $S(T)$ **et** W_T **on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{177}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{178}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{179}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

15 Projet 15

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option Power Symétrique. Put.

Le but du Projet 15 est est l'évaluation numérique et analytique du prix de vente d'une option Power Symétrique.

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = (max(0, (K - S)))^2 \end{cases} \tag{180}$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S, t)$ de l'option de vente (ou put) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra vendre au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0, S)$ est le prix au temps $t = 0$ de put de prix d'exercice K à l'échéance $T > 0$, et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S, t) = S^2 e^{(\sigma^2+r)(T-t)} N(-(d_1 + \sigma\sqrt{T-t})) + K(Ke^{-(T-t)r} N(-d_2) - 2SN(-d_1))$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{181}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = K^2 e^{-(T-t)r} \\ V(L, t) = 0 \end{cases} \tag{182}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.
3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{183}$$
4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.
5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.
6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
7. Imposer en $S = 0$ la conditions à limite de Neumann
$$\frac{\partial V}{\partial S}(L, t) = 0,$$
discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites:
$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial S}(0, t) = 0 \\ V(L, t) = 0 \end{cases} \tag{184}$$
8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:
$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:
$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{185}$$
où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:
$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par

$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{186}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{187}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{188}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{189}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0 \sigma T}$$
$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif:** $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ **et en prenant** $N_{MC} = 100, 1000, 10000$**. Réaliser les graphes de** $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$**,** $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0 \sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2 \sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{190}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \dots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{191}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{192}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - $S0$
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S,0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1+\gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

16 Projet 16

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option Power Asymétrique.

Le but du Projet 16 est est l'évaluation numérique et analytique du prix d'achat d'une option Power Asymétrique. Call.

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'ecrit de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = max(0, (S^2 - K)) \end{cases} \tag{193}$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S, t)$ de l'option d'achat (ou call) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra acheter au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0, S)$ est le prix au temps $t = 0$ de call de prix d'exercice K à l'échéance $T > 0$, et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S, t) = S^2 e^{(\sigma^2 + r)(T-t)} N(\tilde{d}_1) - K e^{-(T-t)r} N(\tilde{d}_2)$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln(S/\sqrt{K}) + (r + 3\sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\ln(S/\sqrt{K}) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \quad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{194}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = 0 \\ V(S, t) = 0 \end{cases} \tag{195}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{196}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions aux limites de Neumann
$$\frac{\partial V}{\partial S}(0, t) = 0,$$
discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites.

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:
$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:
$$dS_t = rSdt + \sigma S dW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{197}$$
où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:
$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t=0) = S_0] \tag{198}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)\right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}}\sum_{k=1}^{N_{MC}}\left[\Lambda\left(S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{(k)}(0,1)\right)\right)\right] \tag{199}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{200}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{201}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0)+h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0)-h)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif: $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ et en prenant $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. Réaliser les graphes de $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$**

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{202}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \dots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{203}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{204}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\,\sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.

17 Projet 17

Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes pour une option Power Asymétrique. Put.

Le but du Projet 17 est est l'évaluation numérique et analytique du prix de vente d'une option Power Asymétrique.

L'équation de Black et Scholes avec la condition finale s'écrit de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(S, t = T) = \Lambda(S) = max(0, (K - S^2)) \end{cases} \tag{205}$$

Cette équation permet de trouver le prix $V(S,t)$ de l'option de vente (ou put) d'une action qui vaut initialement S et qu'on pourra vendre au prix K dans un temps ultérieur T. $V(0,S)$ est le prix au temps $t = 0$ de call de prix d'exercice K à l'échéance $T > 0$, et d'actif S en $t = 0$. On note σ la volatilité de l'action, r le taux d'intérêt.

On étudie également le problème d'évaluation des grecques, définis par les expressions:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Partie I. Solution analytique.

Montrer que la solution analytique de l'équation de Black et Scholes ci-dessus est:

$$V(S,t) = -S^2 e^{(\sigma^2+r)(T-t)} N(-\tilde{d}_1) + K e^{-(T-t)r} N(-\tilde{d}_2)$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln(S/\sqrt{K}) + (r + 3\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\ln(S/\sqrt{K}) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Elle sera utilisée pour vérifier la précision des calculs et déduire les conditions aux limites pour le schéma aux différences finies.

Calculer les grecques.

Partie II. Résolution numérique de l'équation de BS.

2.1 Discrétisation de l'équation de BS.

a) Discrétisons les variables: spatiale et temporelle:

x: $S_0 = 0, ...S_i, ...S_{N+1} = L$.

t: $t^0 = 0, ...t^n, ...t^{M+1} = T$.

Donc

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, ...N + 1 \\ n = 0, 1, 2, ...M + 1 \\ \Delta S = \dfrac{L}{N+1}, \qquad \Delta t = \dfrac{T}{M+1} \\ V(t_n, S_i) \equiv V_i^n \end{cases} \tag{206}$$

b) Pour discrétiser l'équation (1) on utilise:

- pour $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ la dérivée retrograde,
- pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ la seconde dérivée, centrée,
- pour $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ la dérivée centrée

On définit l'opérateur M_{BS}^n par l'expression:

$$M_{BS}^n = rV_i^n - rS_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 \frac{V_{i+1}^n + V_{i-1}^n - 2V_i^n}{(\Delta S)^2}$$

c) L'équation de Black et Scholes discrétisée par différentes méthodes s'écrit :

- par la méthode d'Euler explicite

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^n(V_{i-1}^n, V_{i+1}^n, V_i^n),$$

- par la méthode d'Euler implicite :

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = M_{BS}^{n-1},$$

- par la méthode de Crank-Nicolson implicite:

$$\frac{V_i^n - V_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(M_{BS}^{n-1} + M_{BS}^n).$$

2.2 Travail à faire

1. Montrer les condition aux limites:

$$\begin{cases} V(0, t) = Ke^{-(T-t)r} \\ V(L, t) = 0 \end{cases} \tag{207}$$

2. Discrétiser les conditions aux limites et les conditions initiales.

3. Appliquer la méthode implicite de Crank-Nicolson et montrer qu'on peut reécrire cette équation sous la forme :
$$B_i V_{i-1}^{n-1} + D_i V_i^{n-1} + A_i V_{i+1}^{n-1} = K_i^n, \tag{208}$$

4. Préciser A_i, D_i, B_i, K_i^n et écrire l'équation sous la forme matricielle.

5. Appliquer l'algorithme de Thomas et trouver la solution.

6. Visualiser les solutions pour $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

7. Imposer en $S = 0$ la conditions aux limites de Neumann
$$\frac{\partial V}{\partial S}(L, t) = 0,$$
discrétiser cette condition et résoudre l'équation de Black et Scholes avec nouvelles conditions aux limites.

8. Utiliser les différences finies pour évaluer les grecques $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ dans un point S.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} L = 20, \quad T = 0.5 \\ K = 10, \quad r = 0.1, \quad \sigma = 0.5 \\ N = 100, \quad \Delta t = 10^{-2} \end{cases}$$

Partie III. Simulation Monte Carlo.

On suppose que l'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rSdt + \sigma SdW(t), \quad S(0) = S_0 \tag{209}$$

où (r, σ) sont les mêmes paramètres que dans l'EDP de Black-Scholes et où $W(t)$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

La solution de cette équation est définie par:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Alors le prix d'une option européenne au moment de temps $t = 0$ de fonction de payoff $\Lambda(S)$ est donné par
$$V(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))/S(t = 0) = S_0] \tag{210}$$

La valeur finale de $S(T)$ est définit par

$$S(T) = S(0) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \mathbb{N}(0,1) \right),$$

où $\mathbb{N}(0,1)$ est le nombre qui suit la loi normale centré réduite et l'expression $\sqrt{T}\mathbb{N}(0,1)$ remplace $W(T)$.

1) Finalement on peut estimer le prix de l'option par la moyenne empirique suivante (sauf Projet 12):

$$V(S_0,0) = \frac{e^{-rT}}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \left[\Lambda \left(S(0) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \mathbb{N}^{(k)}(0,1) \right) \right) \right] \tag{211}$$

2) Delta d'une option européenne

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \sim \frac{V(S+h) - V(S)}{h}$$

au moment de temps $t = 0$ est donné par

$$\Delta(S_0,0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}] \tag{212}$$

où l'évolution de l'actif $S^h(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^h(t) = (S(0) + h) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right)$$

et h est un petit nombre.

3) Gamma d'une option européenne

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sim \frac{V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)}{h^2}$$

au moment $t = 0$ est donné par

$$\Gamma(S_0,0) = e^{-rT} \mathbb{E}[\frac{\Lambda(S^{h_1}(T)) - 2\Lambda(S(T)) + \Lambda(S^{h_2}(T))}{h^2}] \tag{213}$$

où l'évolution de l'actif $S^{h_1}(t)$ commence de $S_0 + h$:

$$S^{h_1}(t) = (S(0) + h) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right),$$

l'évolution de l'actif $S^{h_2}(t)$ commence de $S_0 - h$:

$$S^{h_2}(t) = (S(0) - h) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right),$$

4) **Evaluation des grecques par le calcul de Malliavin.**

La méthode développée la première fois par Fournié permet d'écrire les sensibilités sous la forme d'une espérance.

$$\Delta(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Delta]$$
$$\Gamma(S_0, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}[\Lambda(S(T))\omega_\Gamma]$$

où les poids ω_Δ et ω_Γ ne dépendent pas du payoff de l'option.

$$\omega_\Delta = \frac{W_T}{S_0\sigma T}$$

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma})$$

Ici W_T est la dernière coordonné du mouvement Brownien.

Travail à faire

1. Calculer par simulation une estimation de $V(S_0, 0)$. Pour cela on n'a besoin que la valeur finale $S(T)$. Donc vous allez simuler un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. Ensuite il ne reste qu'à calculer la moyenne empirique de $\Lambda(S(T))$ par la formule (211)

2. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et $S^h(T)$ on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$\frac{\Lambda(S^h(T)) - \Lambda(S(T))}{h}$$

3. Calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Gamma(S_0, 0)$.

4. Essayer de calculer de façon similaire par simulation une estimation $\Theta(S_0, 0)$.

5. **Effectuer ces calculs avec les mêmes données que dans la partie 2, pour différentes valeurs initiales de l'actif: $S_0 = 0, 0.2, 0.4, \ldots, 20$ et en prenant $N_{MC} = 100, 1000, 10000$. Réaliser les graphes de $S_0 \mapsto V(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Delta(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Gamma(S_0, 0)$, $S_0 \mapsto \Theta(S_0, 0)$**

6. Calculer par simulation une estimation de $\Delta(S_0, 0)$ par le calcul de Malliavin. Pour cela vous simulez aussi un grand nombre (N_{MC}) de nombres $\mathbb{N}(0,1)$ qui suivent la loi normale centré réduite. **Pour chaque couple $S(T)$ et W_T on utilise le même nombre** $\mathbb{N}(0,1)$ Ensuite on évalue la moyenne empirique de
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{W_T}{S_0\sigma T}]$$
$$e^{-rT}[\Lambda(S(T))\frac{1}{S_0^2\sigma T}(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}]$$

Partie IV. Estimation de volatilité σ

L'actif sousjacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0,T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{214}$$

On note σ la volatilité de l'action, r le drift ($r = \mu$ dans le monde de risk - neutre). La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

On définit sur l'intervalle $[0,T]$ une grille de points

$$t_i = i\Delta t,\ i = 0, \ldots, n$$

Alors pour tout i on a, en notant $S_i = S(t_i)$

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires

$$U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right) = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1)$$

suivent la loi normale de moyenne

$$E[U_i] = (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{215}$$

et de variance

$$Var[U_i] = \sigma^2 \Delta t. \tag{216}$$

Donc on a une estimation pour la volatilité

$$\sigma = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'actif S entre les dates t_0 et t_n

$$S(t_0), S(t_1), ..., S(t_n)$$

On peut alors calculer les valeurs $U_i = ln\left(\frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}\right)$ aux instants de temps correspondants et en déduire une estimation de la moyenne et la variance des U_i:

$$E[U_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad Var[U_i] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - a)^2$$

On peut maintenant estimer le paramètre inconnu σ à partir de la relation pour $Var[U_i]$ ci-dessus:

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{Var[U_i]}{\Delta t}}$$

soit

$$\sigma^{estime} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n} U_i)^2)}$$

Travail à faire

1. Simuler l'évolution de l'action. Estimer sa volatilité et comparer avec la valeur exacte σ.
2. Verifier que la valeur de la volatilité estimée tombe bien avec la probabilité 95% dans l'intervalle:

$$\sigma = \sigma^{exacte} \in [\sigma^{estime} \pm \frac{1.96\, \sigma^{estime}}{\sqrt{2M}}]$$

3. écrire en VBA une macro pour EXCEL qui permet d'estimer la volatilité à partir des données historiques contenues dans une colonne de fichier EXCEL.

Partie V. Interface graphique

L'objectif de cette partie est de réaliser en VB.Net une interface graphique qui permet de paramétrer et réaliser les différents calculs prévus dans ce projet. L'interface doit répondre aux spécifications suivantes:

1. L'interface doit disposer de trois zones distinctes: "Paramètres du modèle", "Paramètres de calculs", "Paramètres pour les simulations MC".
2. La zone **"Paramètres du modèle"** doit contenir trois champs de saisie:
   - Echéance T
   - Taux sans risque r
   - Volatilité σ
   - S_0
3. Le champs σ doit pouvoir être renseigné soit par saisie d'une valeur soit à l'aide de bouton "Estimer la volatilité". Ce dernier doit déclencher l'estimation de la volatilité à partir des données historiques contenues dans un fichier excel.
4. La zone **"Paramètres de calculs"** doit contenir les champs de saisie:

- pas temporel dt
- pas spatial dS
- limite spatiale L
- Nombre de chemins pour les simulations Monte Carlo

Un bouton doit ensuite permettre de choisir la méthode de calcul entre "Différences finies" et "Monte Carlo". Le bouton "Calculer la solution" doit lancer l'exécutable de calcul correspondant avec les bons paramètres. L'exécutable doit stocker les données de la solution dans un fichier texte.

5. Pour la consultation des résultats de ce calcul l'interface doit proposer de saisir un S_0 et afficher (un bouton à prévoir) dans un champs à coté la valeur $V(S_0, 0)$.

6. Un bouton doit également permettre d'appeler une interface d'affichage graphique (Scilab ou gnuplot) pour visualiser les graphiques.

Partie VI. Comparaison des résultats

1. Tracez la fonction $V(S, 0)$, solution analytique, d'après la formule donnée dans l'énoncé et la comparez avec les solutions numériques obtenues dans les **parties I et II**.

   Appliquez l'approximation suivante de la fonction $N(x)$

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1\kappa + a_2\kappa^2 + a_3\kappa^3 + a_4\kappa^4 + a_5\kappa^5) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   où

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \kappa = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

   Les coefficients sont: $\gamma = 0.2316419, a_1 = 0.319381530, a_2 = -0.356563782, a_3 = 1.781477937, a_4 = -1.821255978, a_5 = 1.330274429$

2. Sur toute la grille de calcul de la solution numérique de l'EDP **(partie II)** évaluer

$$\max_{i,n} |V_i^n - V(S_i, t_n)|$$

3. Calculer les grecques. Comparer les Grecques numériques aux valeurs exactes calculées à partir de la formule de Black et Scholes.