Coloration de graphes

Maria Malek

11 janvier 2010

Problème de Coloration

- Coloration des sommets du graphe :
  - Le plus petit nombre de couleurs tels que :
  - Il n'existe pas de sommets adjacents de la même couleur
- Coloration des arêtes du graphe : application problème d'emploi du temps

Coloration d'arêtes

- Étant donné un graphe G et un entier k :
  - On appelle k-colorations des arêtes de G toute application dans un ensemble de couleurs telle que deux arêtes ayant une extrémité commune soient associées à deux couleurs différents.
  - *l'indice chromatique* du graphe G appelé $q(G)$ est le plus petit entier k, tel qu'il existe une k-coloration de G.
  - Pour chaque couleur l'ensemble d'arêtes ayant cette couleur est appelé *couplage* (dans lequel deux arêtes quelconque n'aient pas d'extremités communes)
  - Une coloration d'un graphe G est une partition de l'ensemble d'arêtes en couplages.

Résultats et théorèmes

- on vérifie que :
$$\Delta \leq q(G) \leq m$$
où Δ étant le degré maximum dans le graphe et m étant le nombre d'arêtes.
- THÉORÈME 1 Si G est un graphe simple, alors g(G) est égal à Δ ou $\Delta + 1$.
- THÉORÈME 2 Si G est biparti, alors g(G) est égal à Δ.

Algorithmes & complexité ! !

- Cas d'un graphe simple
  - Pour pouvoir décider la valeur de l'indice chromatique il faut essayer toutes les possibilités d'attribuer des couleurs aux arêtes.
  - Ce nombre croît exponentiellement par rapport à la taille du graphe ! !
- Cas d'un graphe biparti
  - Il est possible de trouver un algorithme polynomial pour une $\Delta-$coloraion.

Emploi du temps

- Description & Modélisation
  - X étant l'ensemble de profs.
  - Y étant l'ensemble de classes
  - E étant l'ensemble de cours à donner de durée d'une heure chacun.
  - Soit le Graphe Biparti G=(X,Y,E) modélisant ce problème.
  - Un emploi de temps correspond à une partition de l'ensemble des arêtes en couplages.
- Questions :
  - Quel est le plus petit nombre d'heures en lequel il est possible d'établir l'emploi du temps ?

Contrainte de salle-1

- Notations :
  - Le nombre de salles disponibles est s,
  - m étant le nombre total d'heures de cours : $m = \mid E \mid$
  - notons k le plus petit nombre d'heures pour lequel il est possible d'établir un emploi du temps.

$$k \geq max(\Delta, \lceil \frac{m}{s} \rceil)$$

- Lemme 1 Soient G=(X,Y,E) un graphe biparti, k un entier $\geq \Delta$. Il existe une partition de E en k couplages ayant à une unité près le même nombre d'éléments.
- Preuve Par construction, nous équilibrons les couleurs.
- Remarque Les k couplages on chacun $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ ou $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ éléments.

Contrainte de salle-2

- Lemme 1 Soient G=(X,Y,E) un graphe biparti, k un entier $\geq \Delta$. Il existe une partition de E en k couplages ayant à une unité près le même nombre d'éléments.
- Preuve Par construction, nous équilibrons les couleurs.
  - Nous choisissons les deux couplages Ci,Ci ayant la différence maximale de longueurs.
  - Nous procédons à l'équilibrage en échangeant quand nécessaire, les couleurs dans les chaînes de logeurs impairs.
  - nous choisissons deux autres couplages de différence maximale, et nous recommençons ..
  - jusqu'à équilibrage complet du graphe.
- Remarque Les k couplages on chacun $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ ou $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ éléments.

Contrainte de salle-3

- Proposition Étant donné un problème d'emploi du temps avec un nombre de salles égal à s, le plus petit nombre d'heures pour lequel l'emploi du temps est réalisable est :

$$max(\Delta, \lceil \frac{m}{s} \rceil)$$

  - m étant le nombre total d'heures,
  - Δ le maximum du maximum d'heures d'un professeur et du maximum d'heures de cours d'un classe.

Exemple - Données

- Soient x1,x2,x3,x4 : 4 professeurs
- y1,y2,y3,y4,y5 : 5 classes.

	y1	y2	y3	y4	y5
x1	1	2	0	0	0
x2	1	1	1	0	0
x3	0	1	1	1	1
x4	0	0	0	1	2

- $m = 4$, $\Delta = 4$, un emploi de temps en 4 heures est possible.
- Ceci suppose que au moins $\lceil \frac{m}{4} \rceil = 4$ salles disponibles.

Exemple - Contraintes de salle

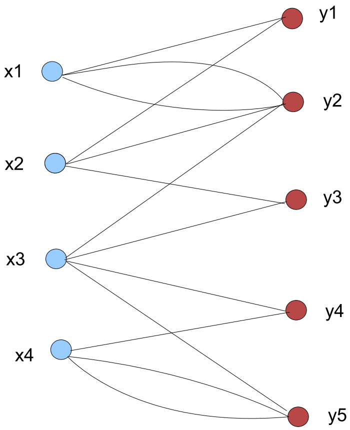
-

	y1	y2	y3	y4	y5
x1	1	2	0	0	0
x2	1	1	1	0	0
x3	0	1	1	1	1
x4	0	0	0	1	2

- *Supposons qu'il y ait seulement 3 salles disponibles* :
- $max(\Delta, \lceil \frac{m}{s} \rceil) = max(4, 5) = 5$

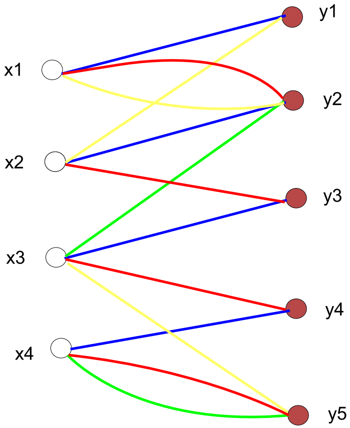
Exemple d'un graphe-1

Le graphe complet :



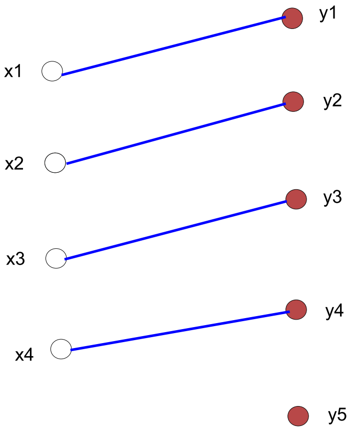
Exemple d'un graphe-2

Les couplages : C1 : bleu, C2 : rouge, C3 : Jaune, C4 : vert, : C5 : vide.



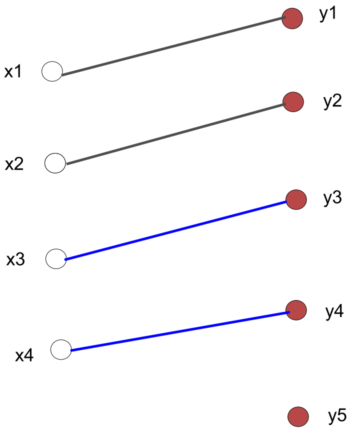
Exemple d'un graphe-3

G : C1 & C5 :



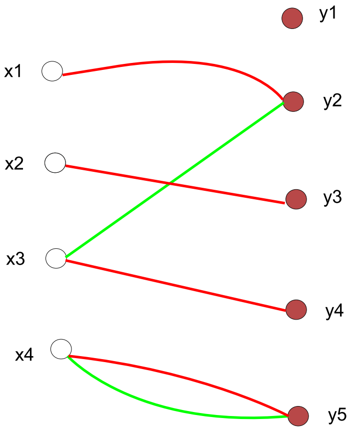
Exemple d'un graphe-4

Échange entre C1 & C5 :



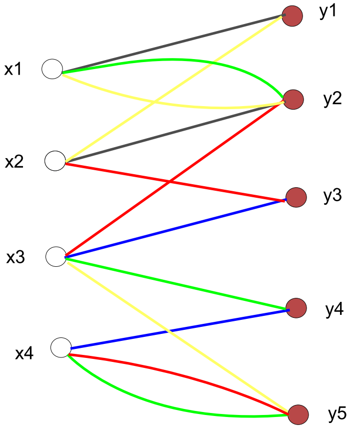
Exemple d'un graphe-5

G : C2 & C4 :



Exemple d'un graphe-6

Echange C2 & C4 : graphe équilibré :



Exemple - Résultat : emploi du temps

heures	1	2	3	4	5
x1	-	-	y2	y2	y1
x2	-	y3	y1	-	y2
x3	y3	y2	y5	y4	-
x4	y4	y5	-	y5	-