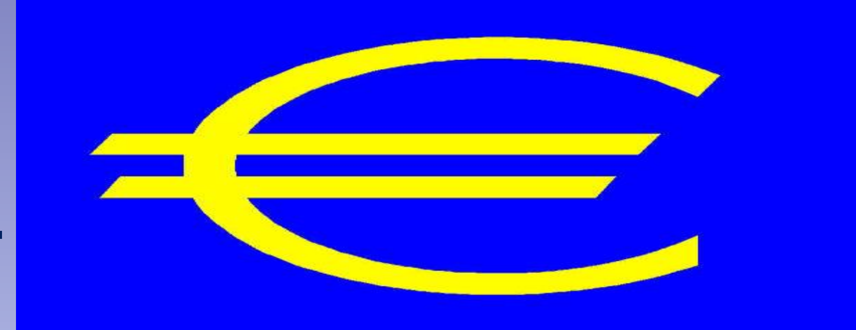
Méthodes d'optimisation en finance

Abdelaziz
BELQADHI

Plan



- Optimisation lineaire (OL): formulation et exemple.
- Application à un problème de financement.
- Optimisation dynamique: application au pricing d‘une call option européenne.

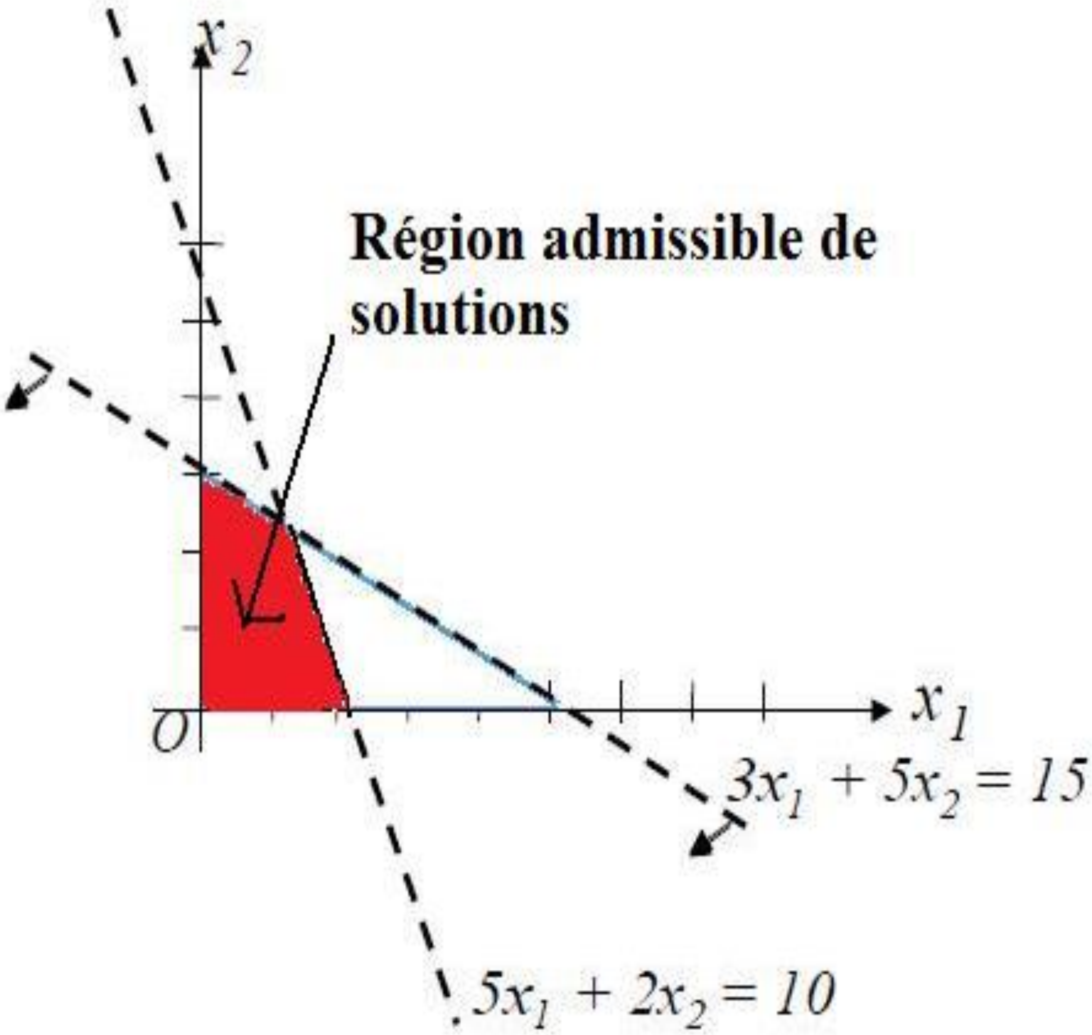
OL: formulation

$$\min c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

OL: terminologie

- $z = c^T x$ est appelée la fonction objectif.
- x est le vecteur des variables de décision.
- Le système linéaire représente les contraintes à satisfaire.

OL: exemple



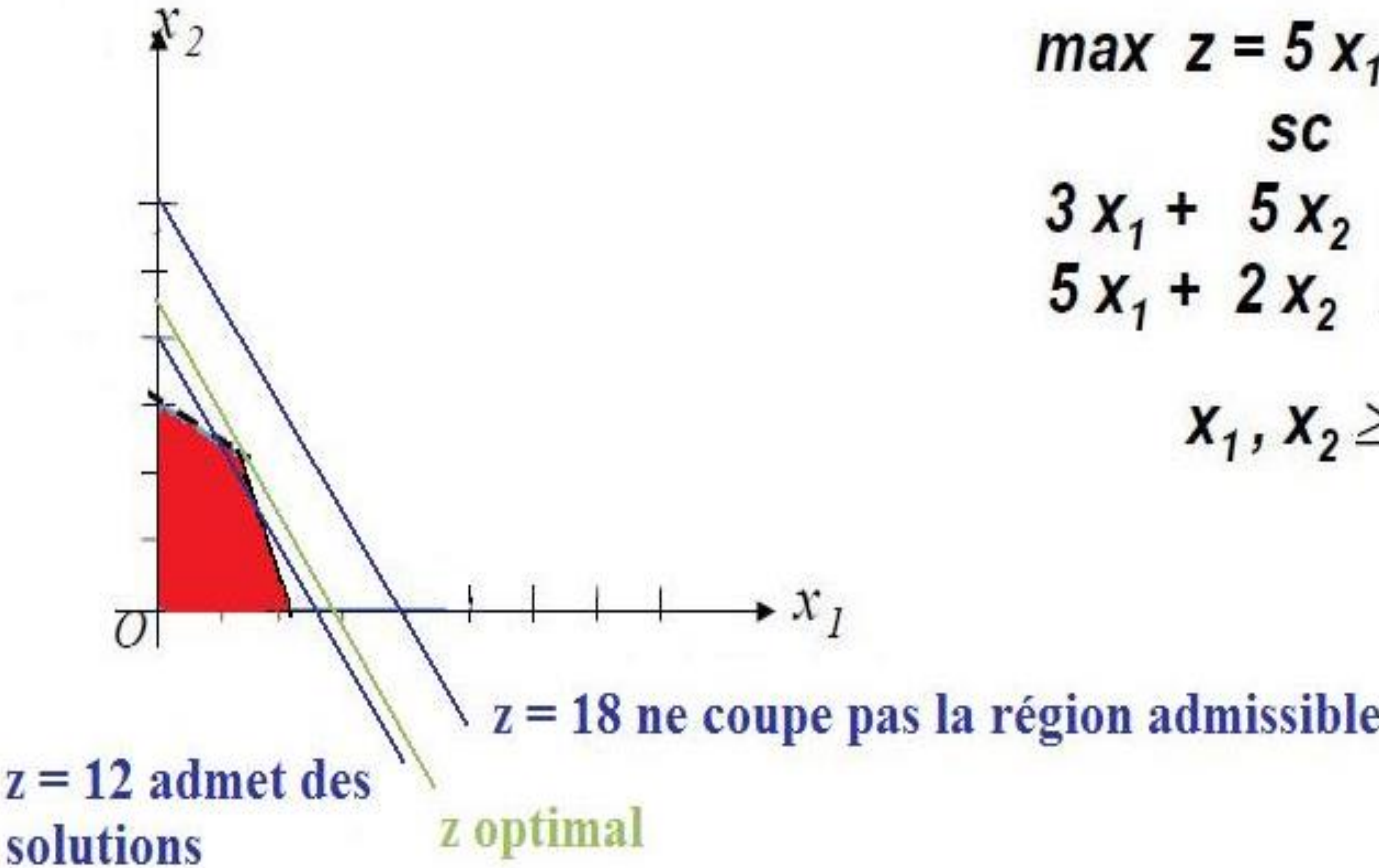
$$\max\ z = 5x_1 + 3x_2$$

sc

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

OL: exemple continué



$$\max \; z = 5x_1 + 3x_2$$

sc

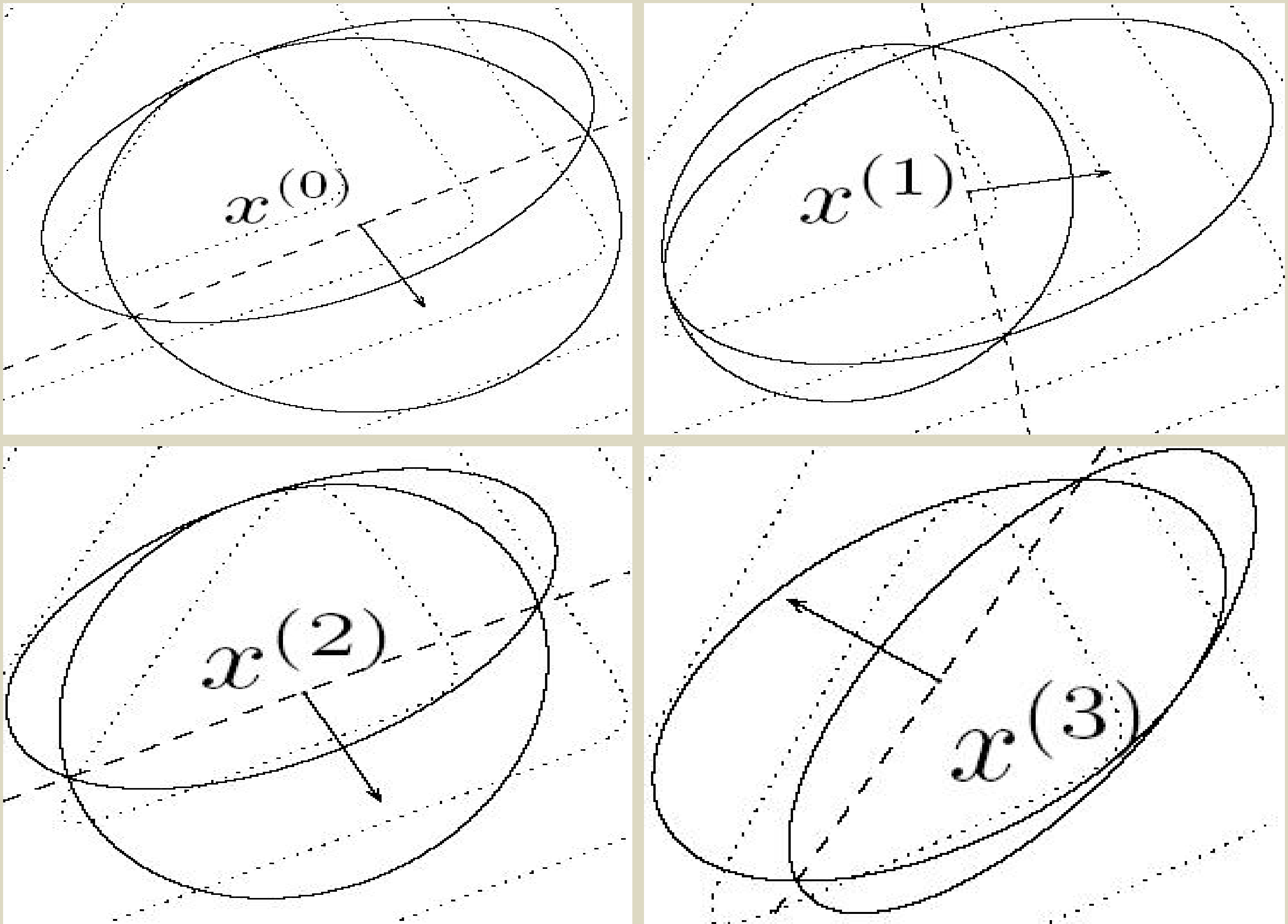
$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

OL: Résolution

- Algorithme du simplexe: d‘une solution de base, effectue des opérations d‘algèbre linéaire pour améliorer la valeur de la fonction objectif.
- Algorithme de l‘ellipsoide: démarre avec un ellipsoide contenant l‘optimum, et va inclure ce point dans une série d‘ellipsoides dont le volume décroit à chaque itération.

Algorithme de l‘ellipsoide en images



OL: financement

- Une corporation veut financer un projet à court-terme, et doit lever des fonds.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Cash-flow (CHF)	-150	-100	200	-200	50	300

- Les sources de financement possibles sont:
- un crédit de maximum 100CHF à 1% d'intérêt par mois;
- un billet de trésorerie valable pendant 3 mois à 2% d'intérêt pour les 3 mois;
- l'excédent mensuel peut-être investi à 0,3% par mois.

OL: modélisation

- x_i montant du crédit au mois i.
- y_i montant du billet de trésorerie émis en i.
- z_i excédent mensuel au mois i.
- F la fortune de la firme au mois de juin.
- Notre objectif est d'avoir une fortune maximale au mois de juin, en respectant toutes les contraintes de payement.

Programme linéaire

max F

x1 + y1 –z1 = 150

x2 + y2 – 1.01 x1 + 1.003 z1 – z2 = 100

x3 + y3 – 1.01 x2 + 1.003 z2 – z3 = -200

x4 – 1.02 y1 – 1.01 x3 + 1.003 z3 – z4 = 200

x5 – 1.02 y2 – 1.01 x4 + 1.003 z4 – z5 = -50

-1.02 y3 – 1.01 x5 + 1.003 z5 – F = -300

x1, …, x5 $\leq$ 100 ; y_i, $z_i \geq 0$.

Option pricing

- Une „call option“ européenne donne le droit d‘acheter une action (qu‘on appelle le sous-jacent), à une date précise (maturité T) pour un prix déterminé à l‘avance (strike price c). Ca veut dire que si le prix au temps T du sous-jacent est de S, et que le strike est de c, alors exercer l‘option nous donne un profit de S – c (payoff de l‘option).

Option pricing (suite)

- Soit S_0 le prix actuel du sous-jacent, et supposons qu'à la date 1, il y ait 2 outcomes possibles: S_{1u} = S_0*u avec probabilité p et S_{1d} = S_0*d avec probabilité 1-p.
- On utilise le principe de réplication pour pricer l'option.
- Soit P un portefeuille composé de Δ actions du sous-jacent et un montant en cash B; on calcule ces 2 paramètres pour que le payoff du portefeuille soit le même que celui de l'option.

Option pricing: réplication

$$\begin{cases} \Delta \times S_0 \times u + B \times R = C_{1u} \\ \Delta \times S_0 \times d + B \times R = C_{1d} \end{cases}$$

Solution:

$$\Delta = \frac{C_{1u} - C_{1d}}{S_0(u-d)} \qquad B = \frac{uC_{1d} - dC_{1u}}{R(u-d)}$$

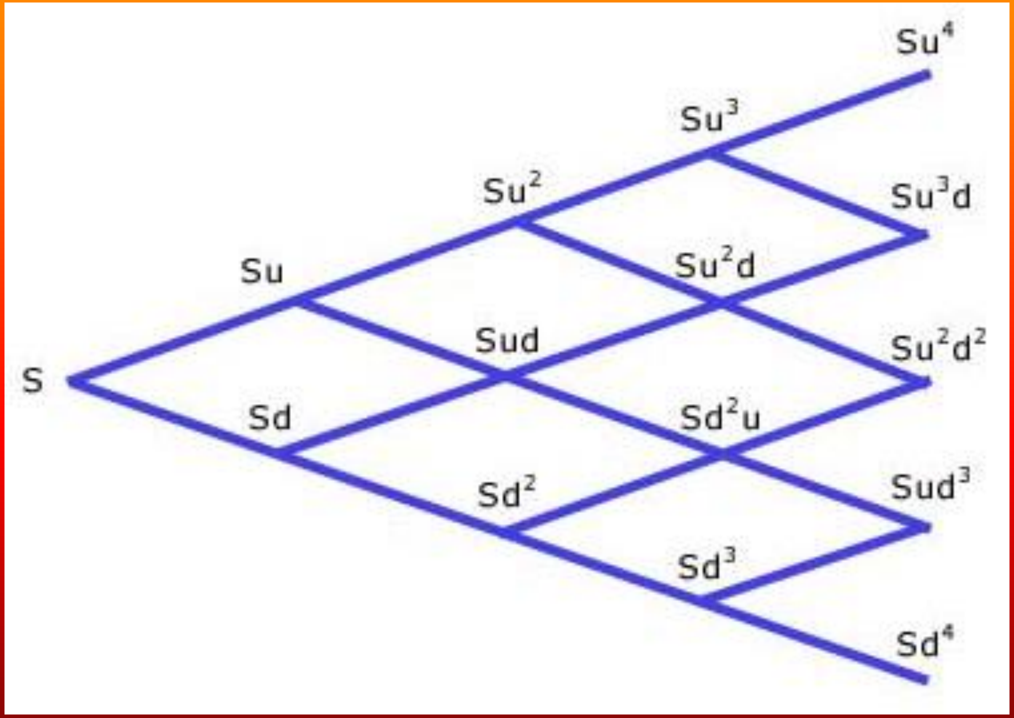
Option pricing: réplication (fin)

- La valeur du portefeuille aujourd‘hui est donc égale au prix de l‘option aujourd‘hui et vaut:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \Delta \times S_0 + B \\
&= \frac{1}{R} \times \left(\frac{R-d}{u-d} C_{1u} + \frac{u-R}{u-d} C_{1d}\right)
\end{aligned}
$$

Programmation dynamique

- On se place maintenant dans un horizon de n mois (n = 4 dans le dessin).



Estimation des paramètres

- Pour spécifier le modèle complètement, il faut trouver u, d et p. Soit $\Delta = \frac{1}{n}$.
- Hypothèse: l‘espérance (moyenne pondérée) et la variance (carré moyen de l‘erreur par rapport à la moyenne) de $\ln\frac{S_1}{S_0}$ sont $\mu\Delta \; et \; \sigma\sqrt{\Delta}$

Estimation des paramètres: équations et solution

$$\ln\frac{S_1}{S_0} = \begin{cases} \ln u \; avec \; probabilité \; p \\ \ln d \; avec \; probabilité \; 1-p \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \times \ln u + (1-p) \times \ln d = \mu\Delta \\ p \times (1-p) \times (\ln u - \ln d)^2 = \sigma^2\Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = e^{\sqrt{(\mu\Delta)^2+\sigma^2\Delta}} \\ d = e^{-\sqrt{(\mu\Delta)^2+\sigma^2\Delta}} \\ p = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\mu^2\Delta}}} \right) \end{cases}$$

Equation dynamique

- Soit v(k, j) la valeur de l‘option au noeud j à la date k.
- Nous cherchons à calculer v(0, 0), qui est le prix de l‘option.
- On se rappelle la formule du payoff de l‘option à la date de maturité: max (S-c, 0).
- En utilisant le principe de réplication, on peut calculer v(k, j) à partir de v(k+1, j+1) et v(k+1, j).

Equation dynamique (2)

$$\begin{cases} v(N,j) = \max\left(u^j d^{N-j} S_0 - c, 0\right) \\ v(k,j) = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{R-d}{u-d} \times v(k+1,j+1) + \dfrac{u-R}{u-d} \times v(k+1,j)\right) \end{cases}$$