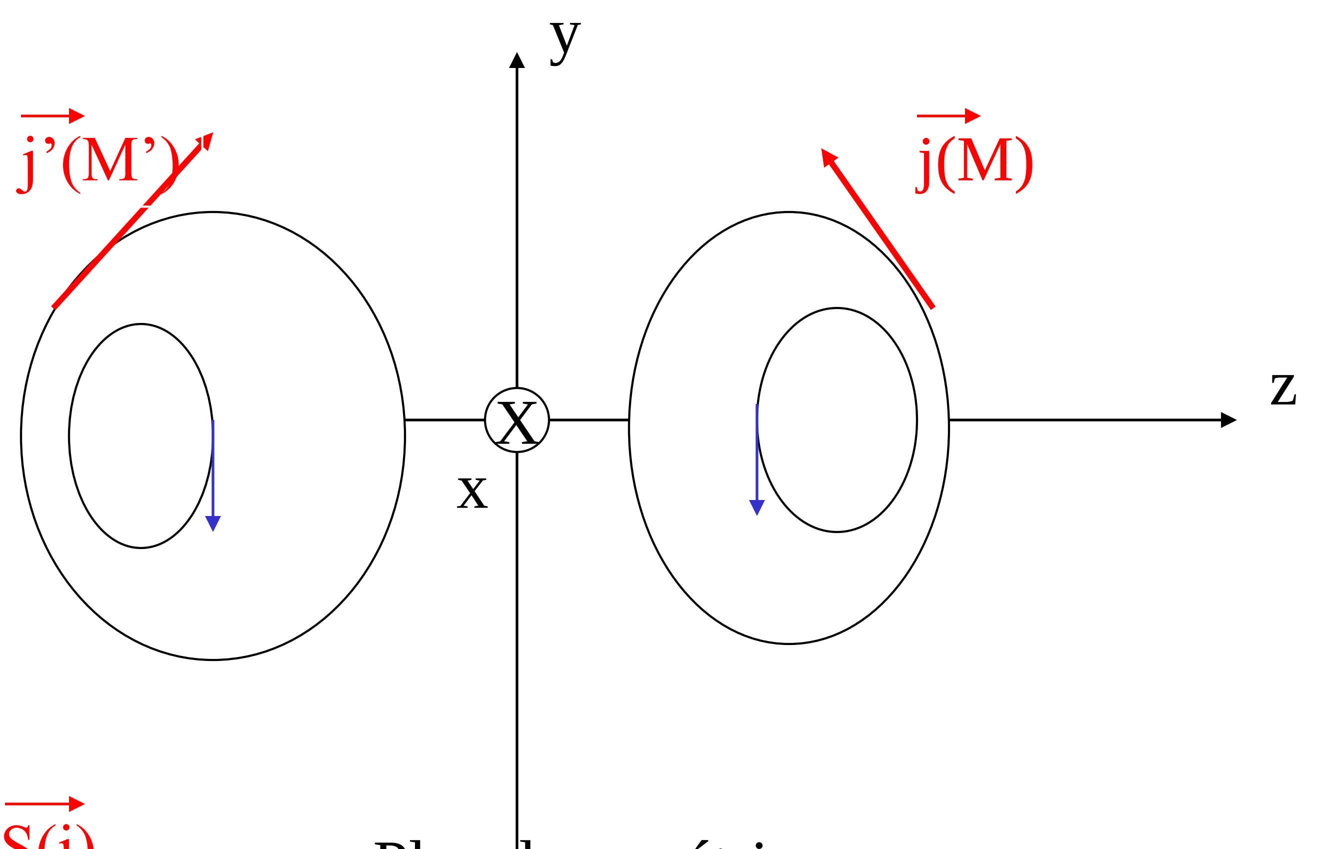
Chapitre 4

Révision de magnétostatique

I. Symétries des distributions des courants

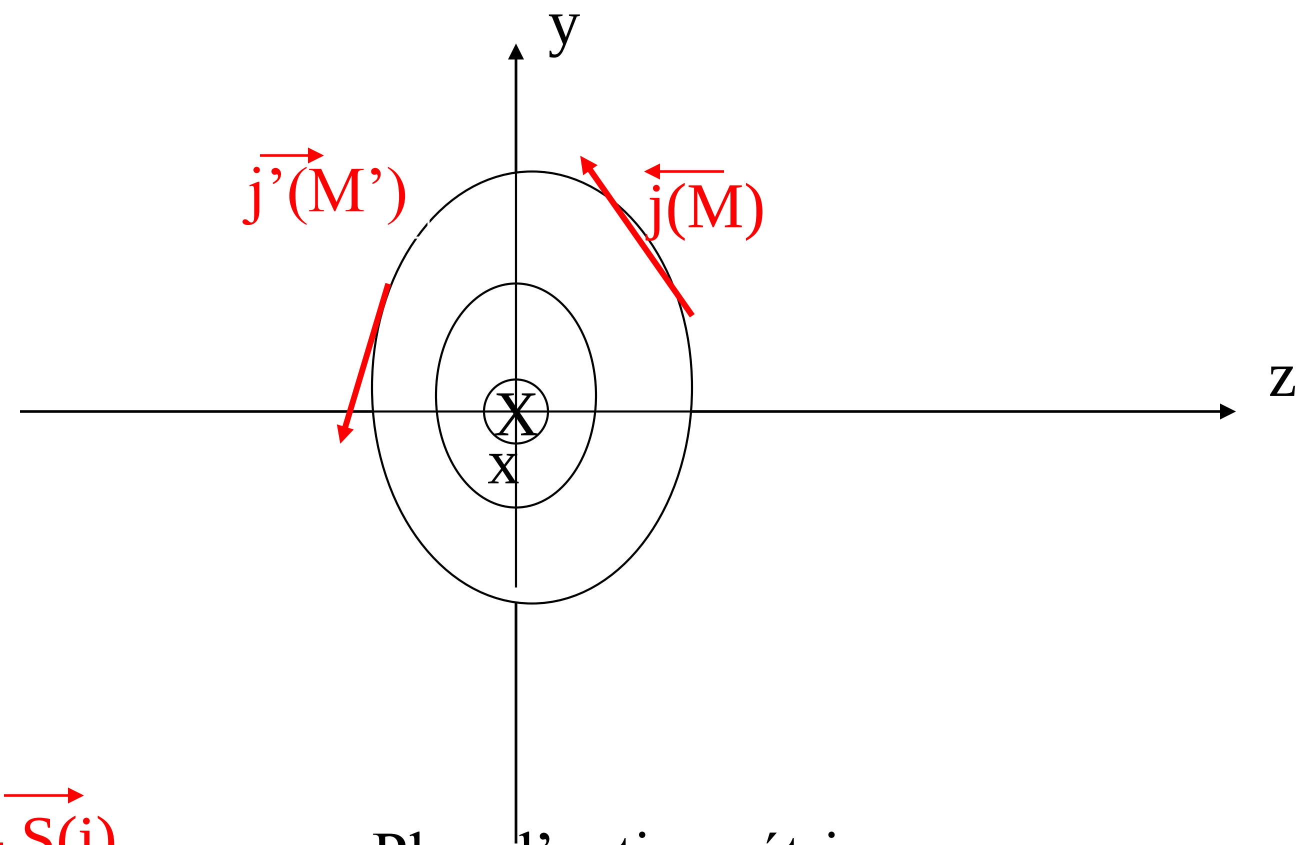
1. Symétrie plane



$\vec{j'} = \overrightarrow{S(j)}$

Plan de symétrie

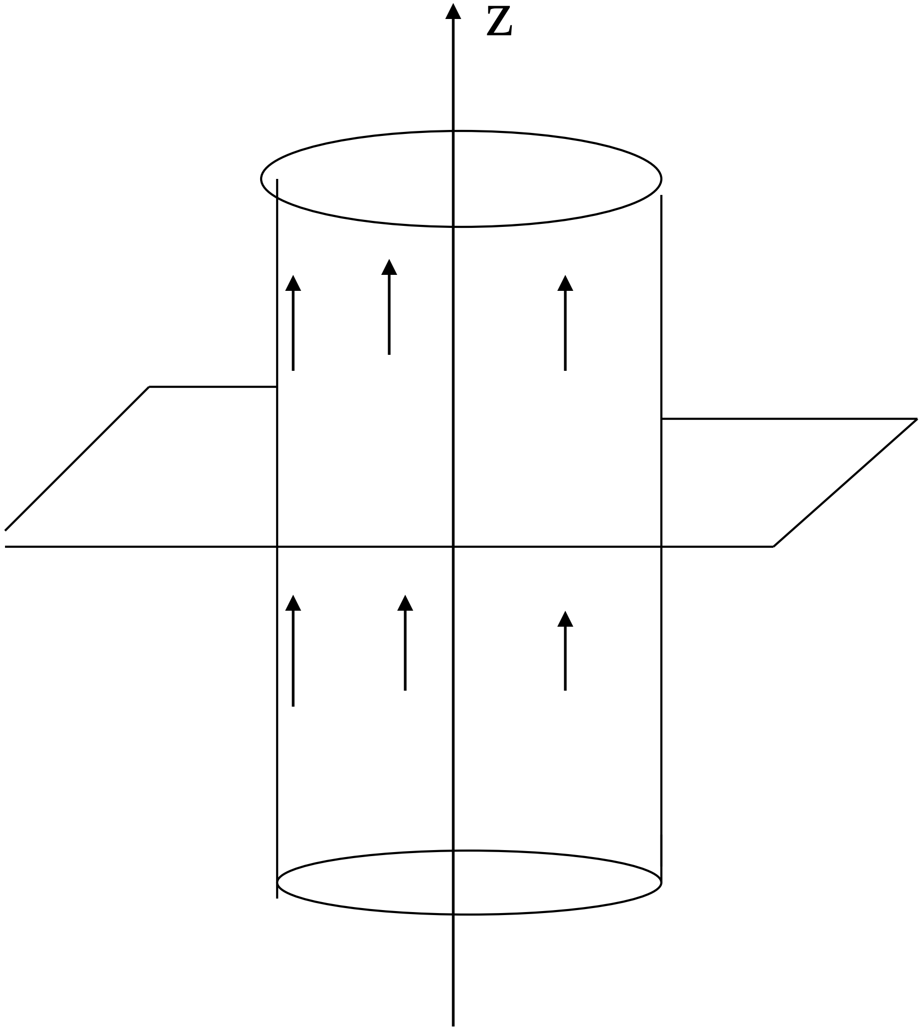
2. Antisymétrie plane



$\overrightarrow{j'} = -\overrightarrow{S(j)}$

Plan d'antisymétrie

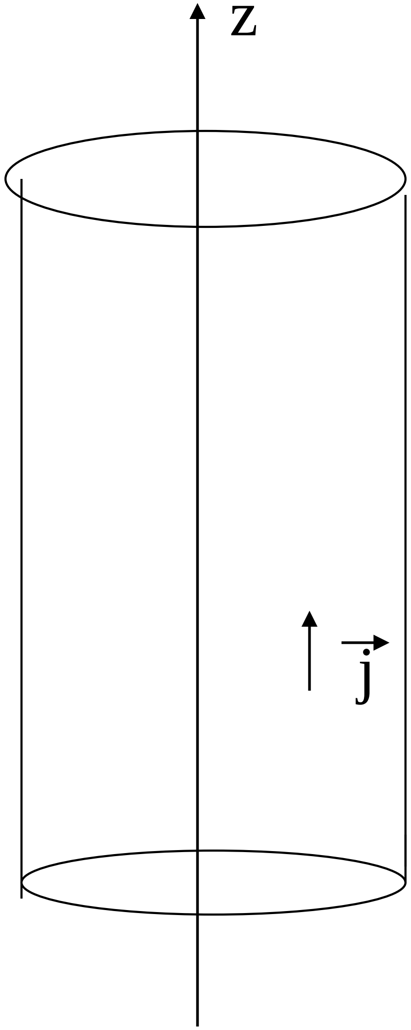
3. Invariance par translation



Invariance par translation
Le long de (oz):

$\vec{j}(x,y,z)=\vec{j}(x,y)$

4. Invariance par rotation autour de (oz)



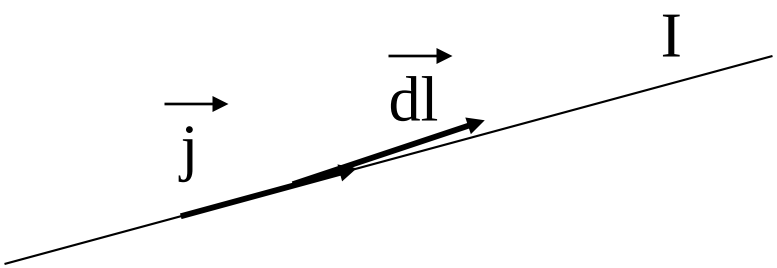
$$\vec{j}(r,\theta,z)=j(r)\vec{e}_z$$

II. Loi de Biot et Savart

1. Vecteur élément de courant

L'élément de courant pour un circuit filiforme

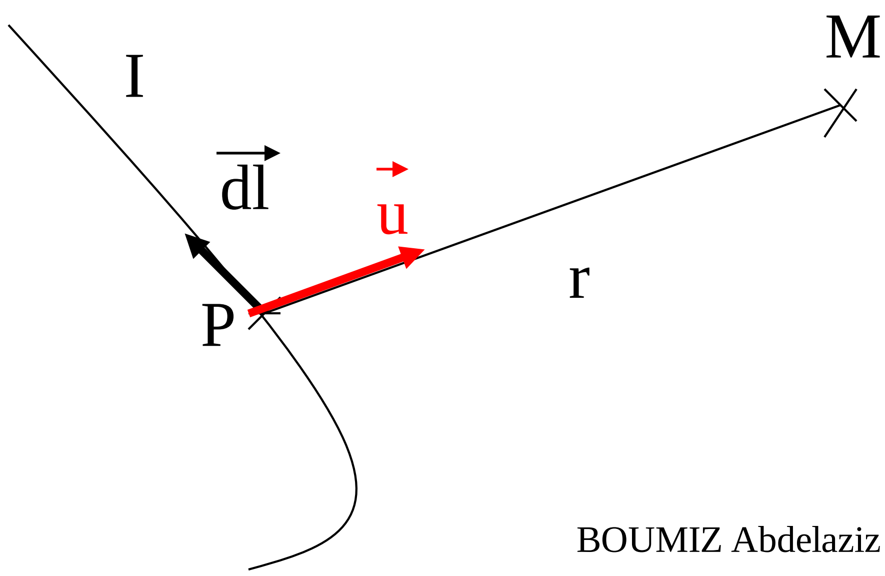
$$\vec{dC} = I\,\vec{dl}$$



2. Loi de Biot et Savart

Cas d'un fil parcouru par un courant I

$$\vec{dC} = I\,\vec{dl}$$



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

CY TECH

- Cas d’une distribution surfacique de courant

.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\,\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Unité de B : Le Tesla= T

III Propriétés de symétrie du champ magnétostatique

1. Symétrie plane

Propriété

Le champ magnétostatique est perpendiculaire au plan de symétrie en chacun de ses points

2. Antisymétrie plane

Propriété 2

Le champ magnétostatique est contenu dans le plan d'antisymétrie de courant en chacun de ses points.

IV Calcul du champ magnétique

1. Champ créé par une spire circulaire en tout point de son axe

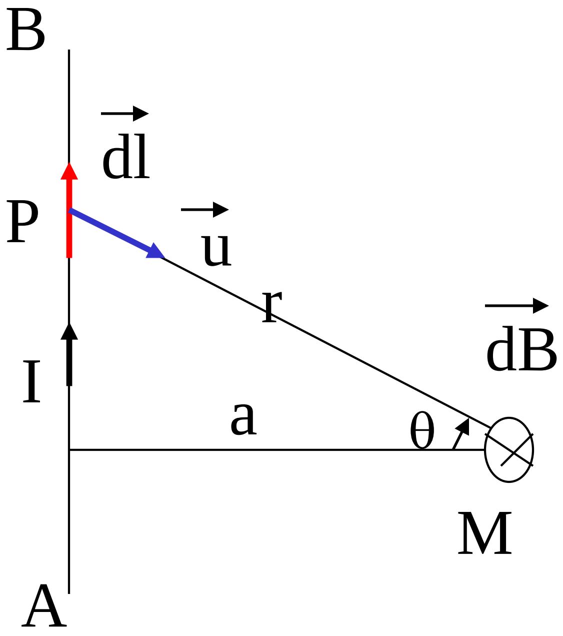
Une spire circulaire de rayon R, est parcourue par un courant I.

1. Établir l'orientation du champ magnétique en tout point de son axe à partir des propriétés de symétrie.

2. Exprimer le champ magnétique en tout point de son axe à partir de la loi de Biot et Savard.

2. Champ créé par un segment

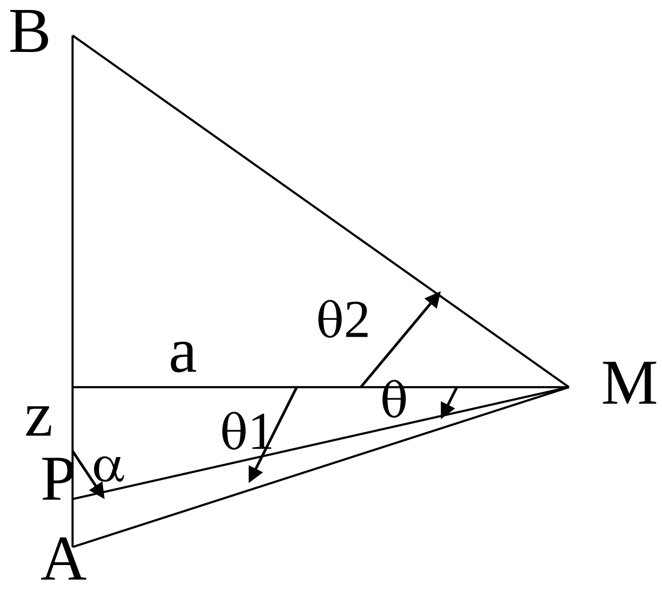
Un segment AB, de longueur L est parcouru par un courant I, établir l'expression du champ magnétique en tout point M à la distance d du fil.



dl = dz

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$



tan θ = z/a $\Rightarrow$ dérivation $dz = \dfrac{a(d\theta)}{\cos^2\theta}$

Or

$\Rightarrow$ $dB = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta d\theta$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta 1}^{\theta 2}\cos\theta \, d\theta$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\theta 2-\sin\theta 1)$$

Remarque

Dans le cas d'un fil rectiligne infiniment long:

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

V- Le théorème d'Ampère

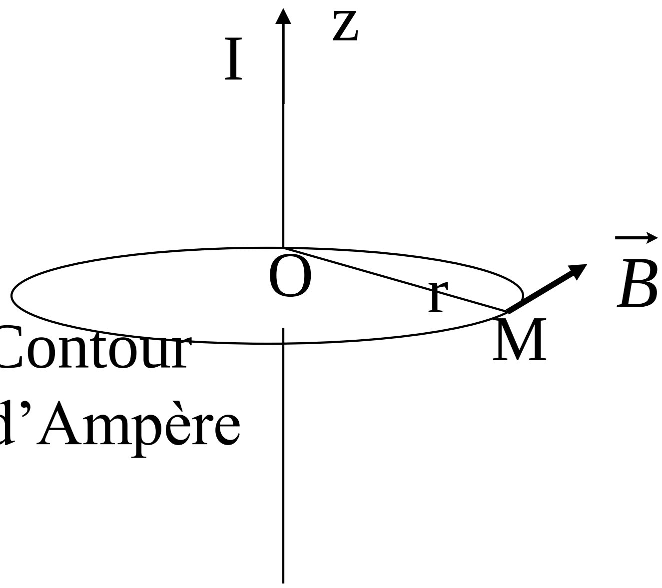
1. Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale à la somme des courants enlacés multiplié par μ_0

$$\oint \overrightarrow{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum I_{enlacé}$$

2. Champ magnétique créé par un fil infini

Soit un fil rectiligne de longueur infinie, parcouru par un courant constant I



$\vec{B}$ appartient au plan D'antisymétrie

$\vec{B}$ est perpendiculaire Au plan de symétrie

- Tout plan perpendiculaire au fil est un plan d'antisymétrie.

Tout plan contenant le fil est un plan de symétrie.

$$\Downarrow$$

$\vec{B}$ est tangentiel

$$\vec{B} = B(r)\vec{e_\theta}$$

.

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{enlacé}$$

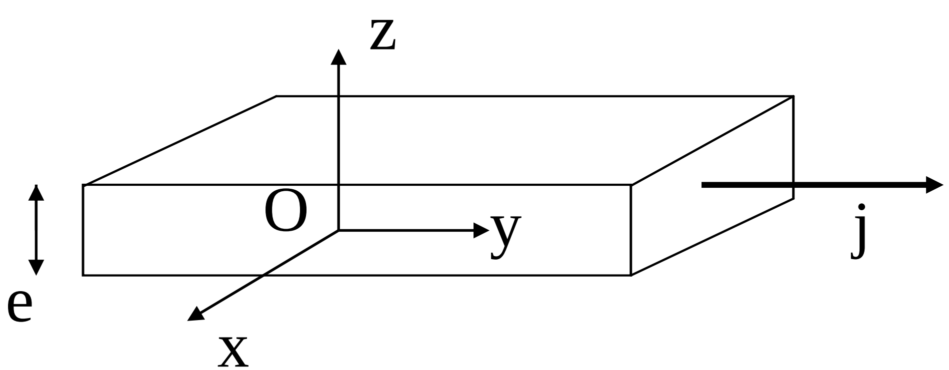
$$\oint B\,dl = \mu_0 I = B \oint dl = B 2\pi r$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\overrightarrow{B(r)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e_\theta}$$

2. Champ magnétique créé par un pavé infini

Un pavé d'épaisseur e et de dimensions infinies, est parcouru par un courant uniforme et constant, de



vecteur densité de courant j constant.

1. A partir des éléments de symétrie, déterminer la direction de $\vec{\mathbf{B}}$ en tout point de l'espace.

2. Calculer le champ $\vec{\mathbf{B}}$ en tout point de l'espace:

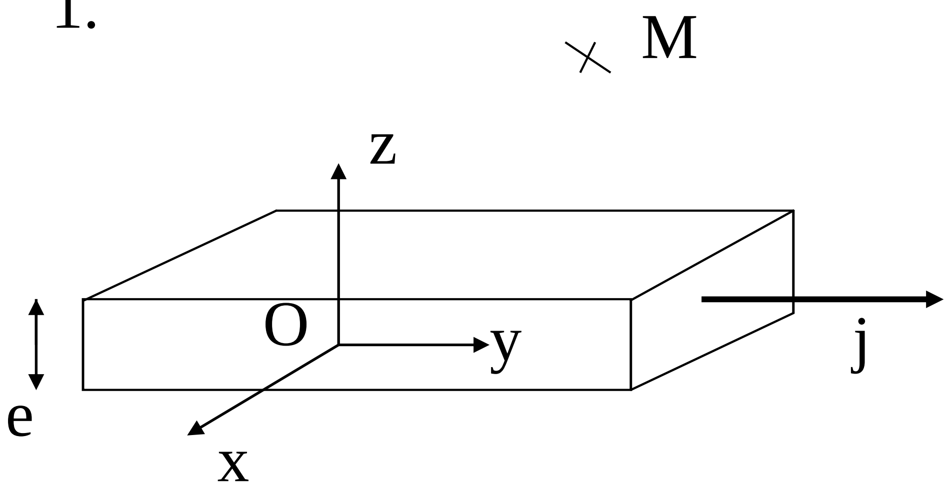
2.1 Le point M est à l'extérieur du pavé : $|z| > e/2$

2.2 Le point M est à l'intérieur du pavé : $|z| < e/2$

3. Représenter l'allure de la courbe de B(z) en fonction de z

Correction

1.



Le plan parallèle à yOz en M est un plan de symétrie:

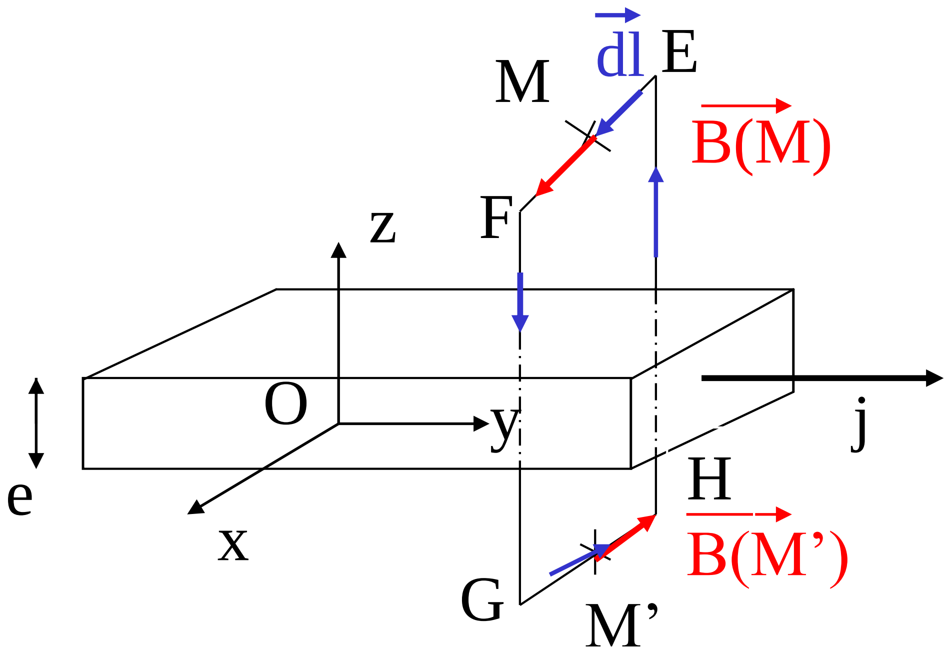
$\vec{B}(M)$ est Perpendiculaire à ce plan

$\vec{B}(M)$ est suivant $\vec{e}_x$

Invariances par translation le long de (Ox) et de (Oy):

$$\vec{B}(M) = B(x,y,z)\vec{e}_x = B(z)\vec{e}_x$$

2.1 Le point M est à l'extérieur du pavé : $|z| > e/2$



Le contour d'Ampère est le rectangle EFGH (EF = L)

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \left(\int_{EF} + \int_{FG} + \int_{GH} + \int_{HE}\right)\vec{B}\vec{dl}$$

$$\int_{FG} \vec{B}\vec{dl} = \int_{HE} \vec{B}\vec{dl} = 0$$

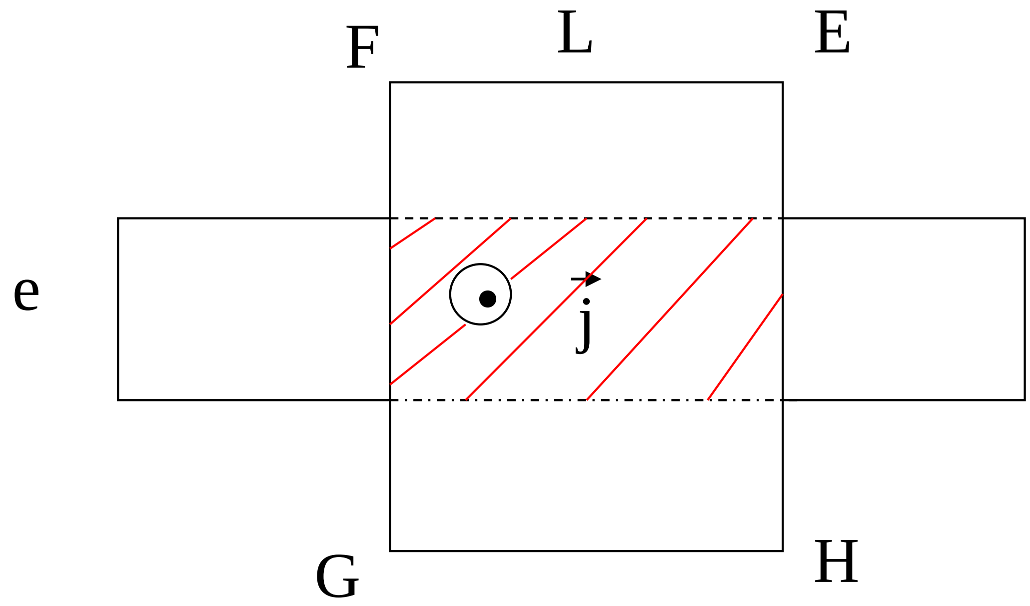
Car $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{dl}$
Le long de FG et HE

$$\int_{EF} \vec{B}\vec{dl} = \int_{EF} B(M)dl = B(M).L$$

$$\int_{GH} \vec{B}(M')\vec{dl'} = \int_{GH} B(M')dl' = B(M).L$$

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = 2B(M).L$$

Expression de Iint.

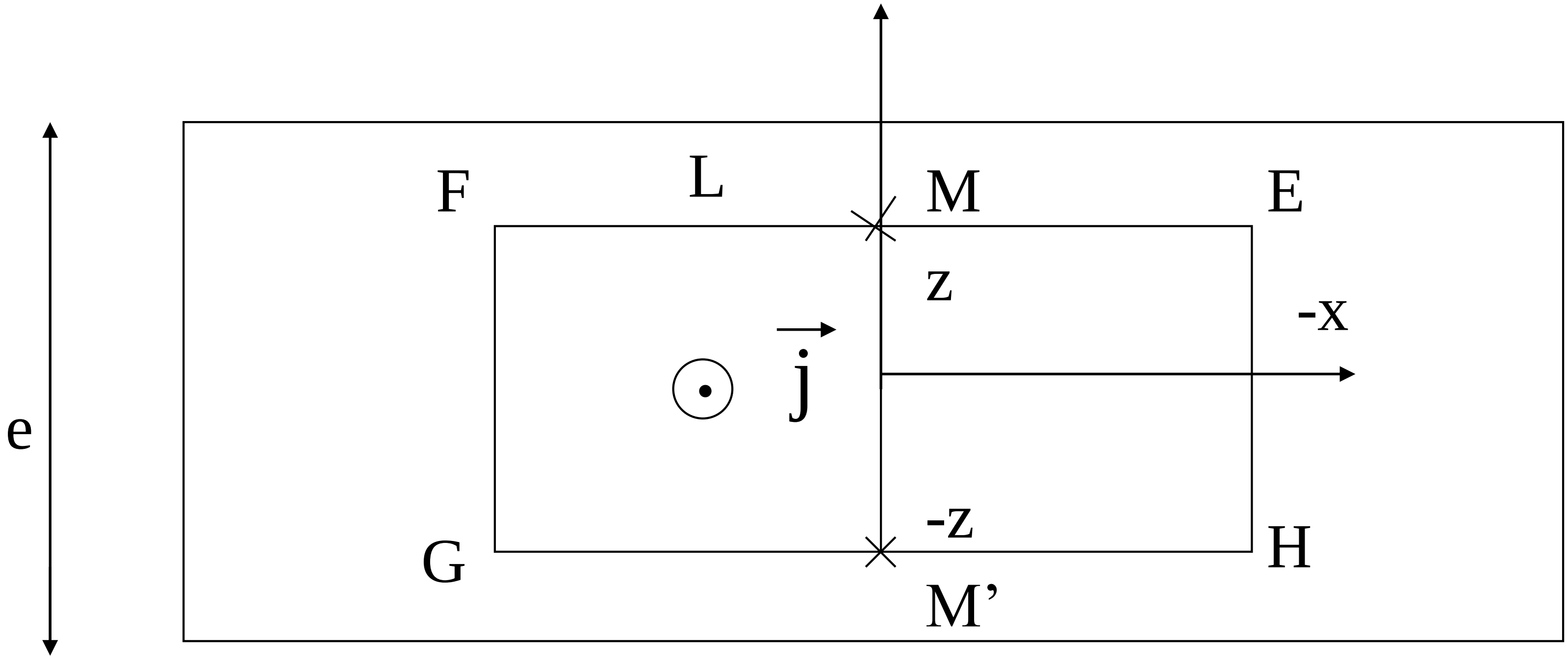


Iint = jeL

Th. d'Ampère: $2B(M)L = jeL\mu_0$: $B(M) = \mu_0 je/2$

$B(M') = -\mu_0 je/2$

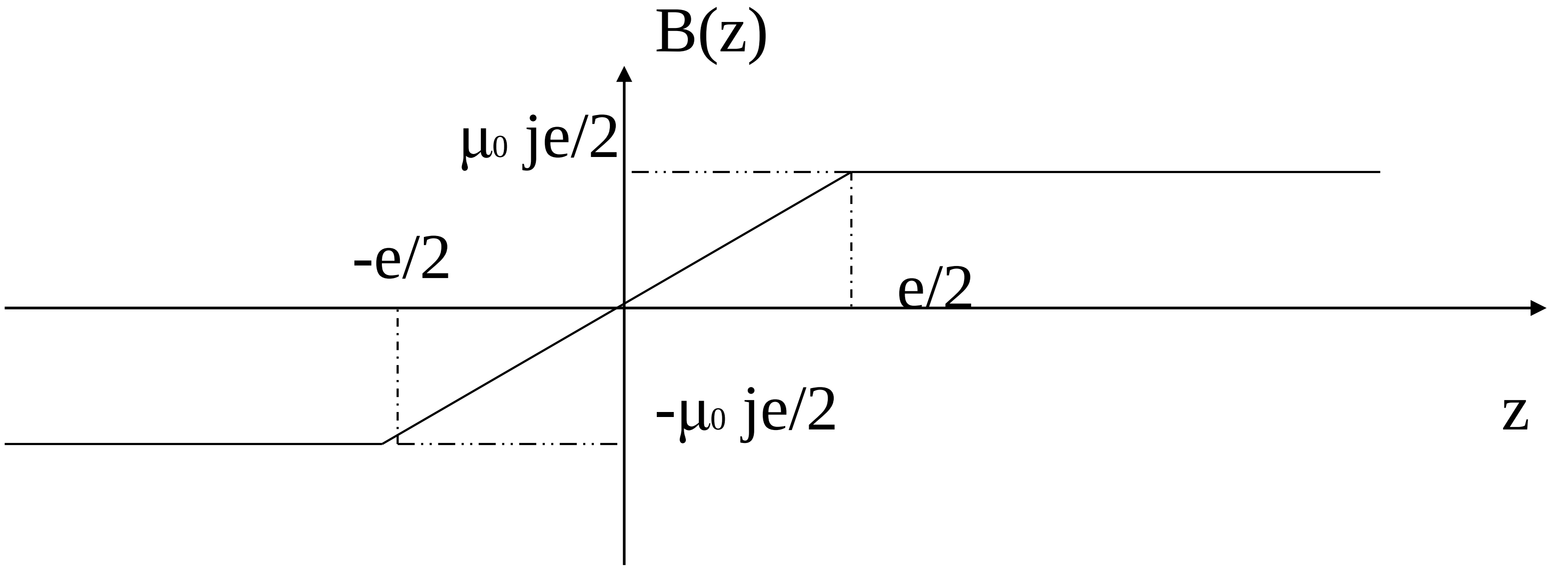
3.2 Le point M est à l'intérieur du pavé : $|z| < e/2$



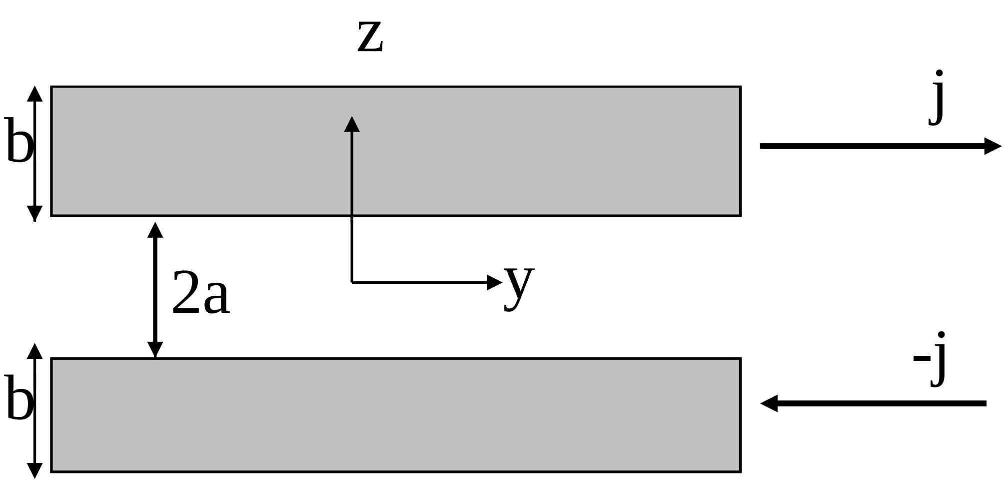
Th. d'Ampère: $2B(M)L = j2\,\mu_0\,zL$: $B(M) = \mu_0\,jz$

$B(M') = -\mu_0\,jz$

3. Représenter l'allure de la courbe de B(z) en fonction de z



5. Champ magnétique créé par deux plans infinis Parallèles de même épaisseur (exercice N° 4 du TD)



Le plan parallèle (yOz) en M est un plan de symétrie

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{B(M)}$ est perpendiculaire à ce plan

1. Les éléments de symétrie

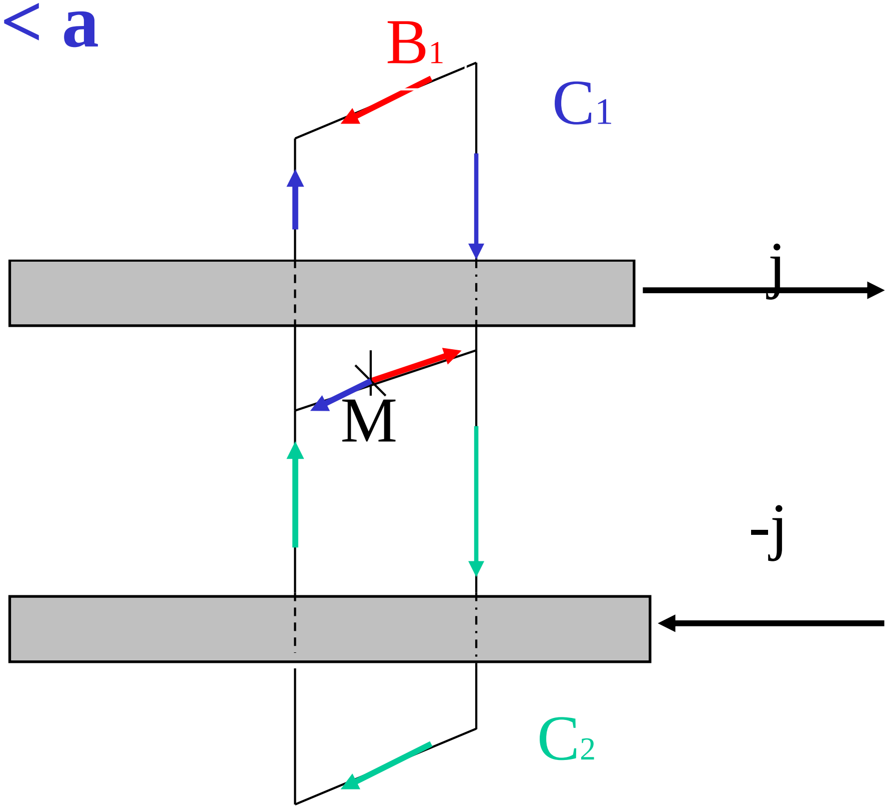
$\overrightarrow{B(M)} = B(x,y,z)\overrightarrow{e_x} = B(z)\overrightarrow{e_x}$

Invariances par translation le long de (Ox) et de (Oy):

$\overrightarrow{B(M)} = B(x,y,z)\overrightarrow{e_x} = B(z)\overrightarrow{e_x}$

2.a Champ magnétique créé par chacun des plans

$|Z| < a$



Contour fermé C_1 parallèle à Oxz, passant par M

Contour fermé C_2 parallèle à Oxz, passant par M

$$\int_{C1} \overrightarrow{B_1}(M)\overrightarrow{dl} = -2B_1(M).L = \mu_0 I^+ = \mu_0 jbL$$

$$\overrightarrow{B_1}(M) = -\frac{\mu_0}{2} jb\overrightarrow{e_x}$$

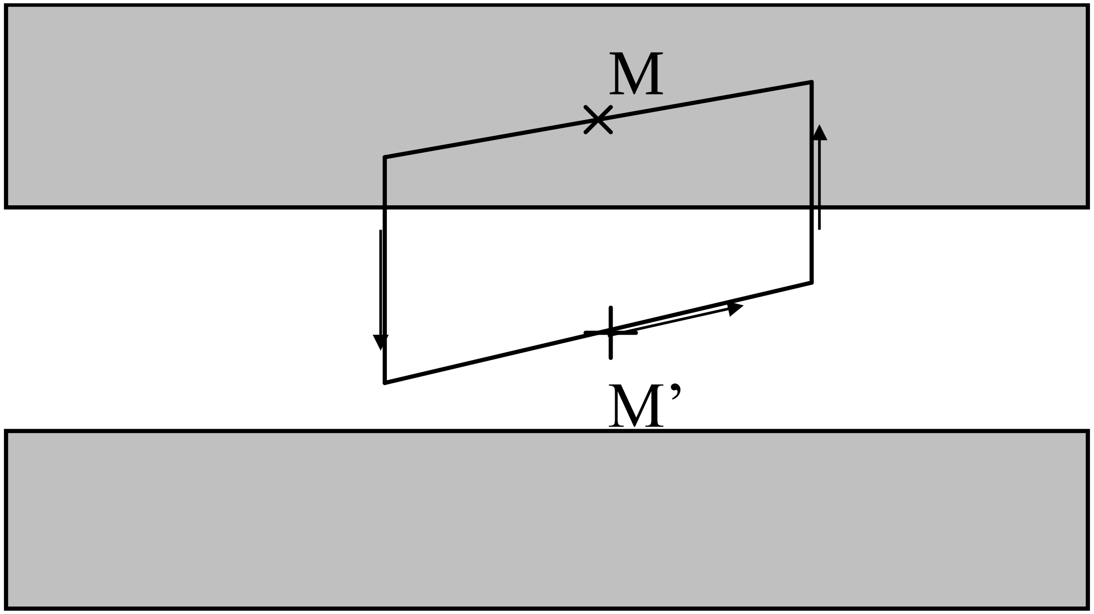
$$\int_{C2} \overrightarrow{B_2}(M)\overrightarrow{dl} = \quad 2B_2(M).L = -\mu_0 I^+ = -\mu_0 jbL$$

$$\overrightarrow{B_2}(M) = -\frac{\mu_0}{2} jb\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B_1}(M) + \overrightarrow{B_2}(M)$$

$$\overrightarrow{B}(|z| < a) = -\mu_0 jb\overrightarrow{e_x}$$

2.b   a<Z < a +b



Contour fermé C parallèle à Oxz, passant par M

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = B(M).L - B(M')L = B(M)L + \mu_0 jbL$$

$$avec B(M') = -\mu_0 jb$$

$$\oint \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I^+ = \mu_0 jL(z-a)$$

$$B(M)L + \mu_0 jLb = \mu_0 jL(z-a)$$

Soit

$$\vec{B}(z) = \mu_0 j(z-a-b)\vec{e_x}$$

Pour a < z < a+b

-(a+b) <Z < -a

$$\overrightarrow{B}(z) = \mu_0 j(-z-a-b)\overrightarrow{e_x}$$

C. M au dessus de P1: z> a+b

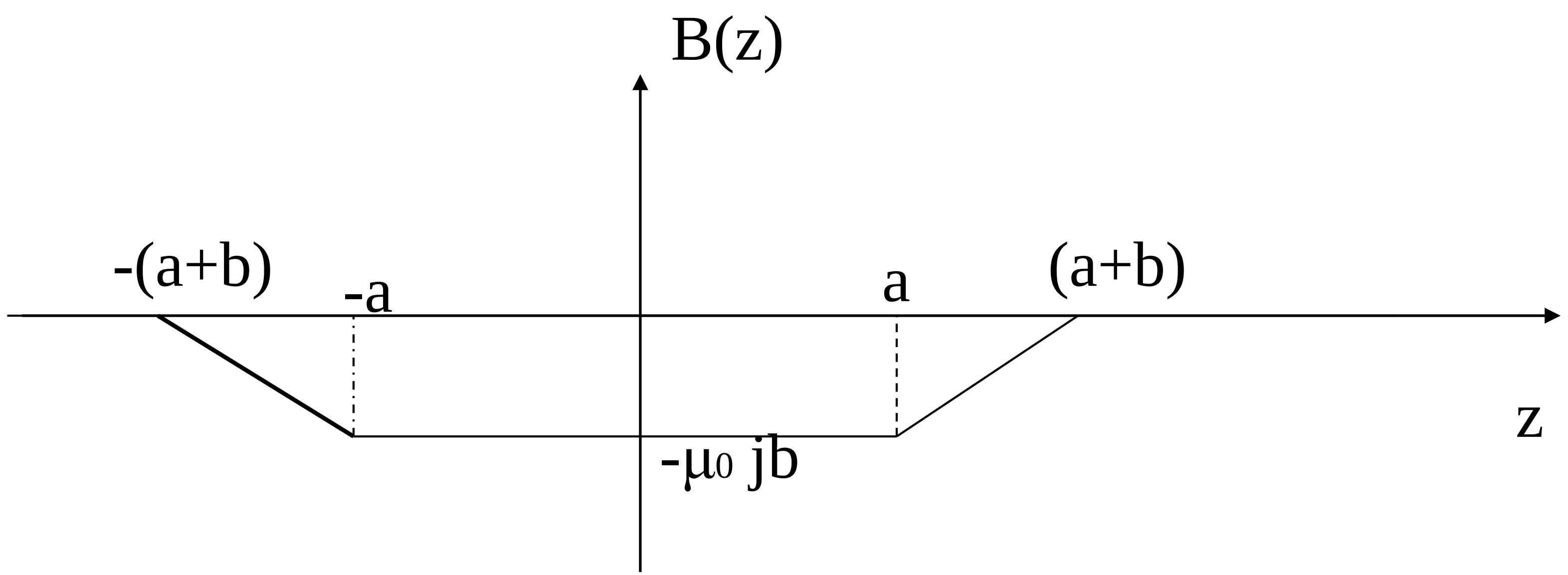
- Le champ créé par P_1: $\overrightarrow{B_1}(M) = \frac{\mu_0}{2} jb\overrightarrow{e_x}$

- Le champ créé par P_2: $\overrightarrow{B_2}(M) = -\frac{\mu_0}{2} jb\overrightarrow{e_x}$

$\Rightarrow$ $$\overrightarrow{B}(z) = \overrightarrow{0}$$

M au dessous de P_2 : $z < -(a+b)$

$$\vec{B}(z) = \vec{0}$$

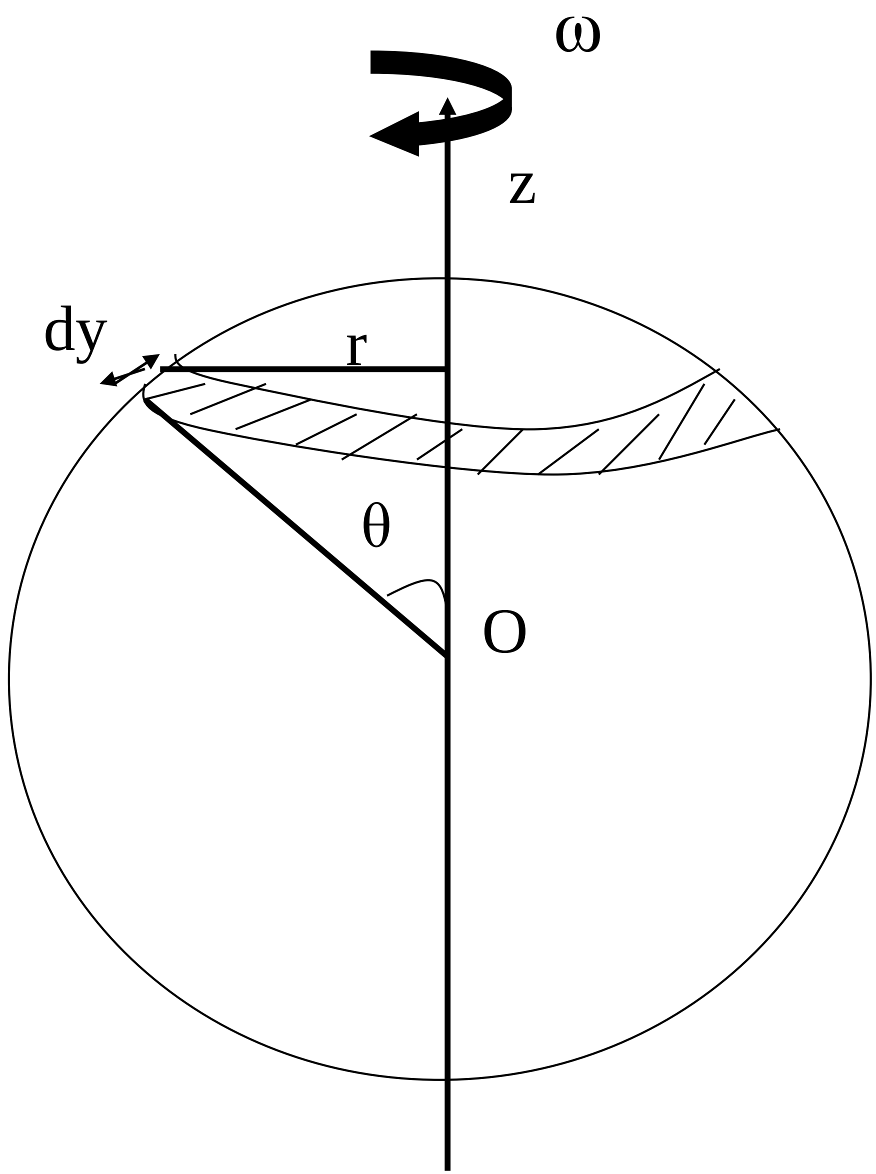

B(z)
-(a+b)
-a
a
(a+b)
z
-μ0 jb

Exercice 7: Champ magnétique créé par une sphère en rotation

Une sphère creuse de rayon a porte une charge densité de charge σ uniforme, tourne autour de l'un de ses diamètres avec une vitesse angulaire ω.

Exprimer le champ magnétique B au centre de la sphère.

Correction



le champ magnétique créé par la spire de rayon r en tout point de son axe est donné par l'expression:

.

$$b = \frac{\mu_0 i}{2r} \sin^3 \theta$$

Soit une spire de rayon r

La vitesse des charges $v = r\omega$

Le déplacement de ces charges pendant dt est $dl = r.\omega.dt$

La charge élémentaire dq = rωσ dy dt

Le courant dI = dq/dt = rωσ dy

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 .\omega .r .\sigma .dy}{2r} \sin^3 \theta$$

Or $$dy = ad\theta$$

d’où $$dB = \frac{\mu_0.\omega.a.\sigma}{2}\sin^3\theta.d\theta$$

Par intégration:

$$B = \frac{\mu_0.\omega.a.\sigma}{2}\int_0^{\Pi} \sin^3\theta.d\theta$$

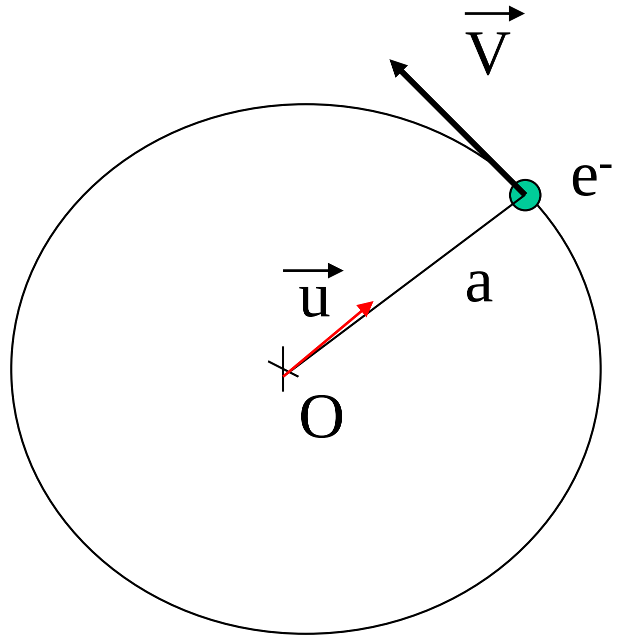
Or

$$\int_{0}^{\Pi} \sin^3\theta . d\theta = \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{12}\cos(3\theta)$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{2\mu_0 . \omega . a . \sigma}{3}$$

Exercice 8: Champ magnétique créé par un électron

Exprimer le champ magnétique créé par un électron décrivant un cercle de rayon a autour d’un proton, au point où est placé ce proton.



L'élément de courant : $i\overrightarrow{dl} = \dfrac{dq}{dt}\overrightarrow{dl} = dq\vec{V} = -e\vec{V}$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\Pi} e\vec{V} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

avec r = a

Mouvement circulaire, l’accélération:

$$\gamma = \frac{V^2}{a}$$

La RFD:

$$\frac{mV^2}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a^2}$$

$$V^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m}\frac{e^2}{a}$$

$$B^2 = (\frac{\mu_0}{4\pi})^2 e^2 (\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 am}) \ \frac{1}{a^4}$$

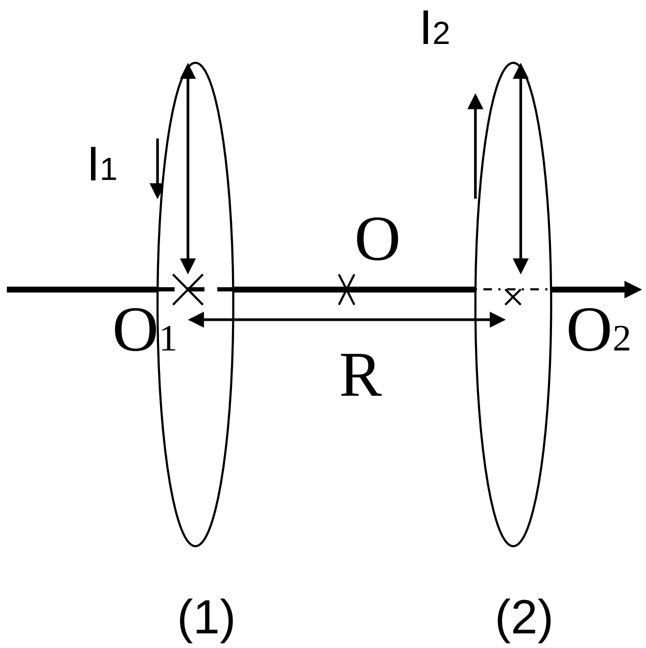
$$B \ = (\frac{\mu_0}{4\pi})^{\frac{3}{2}} \frac{e^2 C}{(ma^5)^{\frac{1}{2}}}$$

Exercice 9: Champ magnétique créé par les bobines d'Helmholtz

Deux bobines plates de N spires, de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I,ont leurs centres distants de R.

Le sens du courant est tel que les champs créés s'ajoutent dans l'espace situé entre les deux bobines.

1. Exprimez le champ magnétique au milieu de leurs centres (O).
2. . Exprimez le champ magnétique en un point M voisin de O.


I2
I1
O
O1
R
O2
(1)
(2)

1. Bobine de très faible largeur $\Rightarrow$ les champs créés par les N spires s'ajoutent.

D'autre part, le champ magnétique créé par une spire circulaire en tout point de son axe est donnée par:

$$b = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$

D'où le champ magnétique total créé par les deux bobines au point O:

$$B = 2\frac{\mu_0 . N . I}{2R} \sin^3 \theta$$