Chapitre 0

Comparaison locale des fonctions réelles

I. Négligeabilité. Domination

1. Négligeabilité

Définition 0.1 (Négligeabilité)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.

Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I\backslash\{a\}$.

On dit que ***f* est négligeable devant *φ* au voisinage de *a*** si et seulement si il existe une fonction réelle ε définie sur I telle que

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \qquad \text{et} \qquad \forall x\in I,\ f(x)=\varepsilon(x)\varphi(x)$$

Cette relation se note

$$f=\mathrm{o}_a(\varphi) \qquad \text{ou} \qquad f(x)=\mathrm{o}_{x\to a}\big(\varphi(x)\big) \qquad \text{(notation de LANDAU)}$$

ou

$$f\underset{a}{\ll}\varphi \qquad \text{ou} \qquad f(x)\underset{x\to a}{\ll}\varphi(x) \qquad \text{(notation de HARDY)}$$

(Si il n'y a pas d'ambigüité, on omettra d'indiquer le point a.)

Remarque. La notation $f=\mathrm{o}_a(\varphi)$ est impropre, car plusieurs fonctions différentes peuvent être négligeables devant une même fonction φ au voisinage de a, c'est-à-dire

$$f_1=\mathrm{o}_a(\varphi) \quad , \quad f_2=\mathrm{o}_a(\varphi) \qquad \text{avec } f_1\neq f_2$$

Exemple. $\quad x=\mathrm{o}_{x\to+\infty}(x^2) \quad , \quad \sqrt{x}=\mathrm{o}_{x\to+\infty}(x^2) \quad , \quad \sin^3 x=\mathrm{o}_{x\to 0}(x)$

Proposition 0.1 (Négligeabilité devant une constante non nulle)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction réelle définie sur I. Alors

$$f=\mathrm{o}_a(1) \iff \lim_{x\to a}f(x)=0$$

Proposition 0.2 (Caractérisation rapide)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I\backslash\{a\}$.

$$f = \mathrm{o}_a(\varphi) \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \end{cases}$$

Proposition 0.3 (Règles opératoires de o_a)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{o}_a(\varphi)$, alors $f + g = \mathrm{o}_a(\varphi)$.
2. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ alors pour tout réel λ, $\lambda f = \mathrm{o}_a(\varphi)$.
3. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $fg = \mathrm{o}_a(\varphi\psi)$.
4. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
5. Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to b} h(x) = a \\ f = \mathrm{o}_a(\varphi) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ h = \mathrm{o}_b(\varphi \circ h)$$

2. Domination

Définition 0.2 (Domination)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.

Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I\backslash\{a\}$.

On dit que **f est dominée par φ au voisinage de a** si et seulement si il existe une fonction réelle χ définie sur I telle que

$$\chi \text{ est bornée au voisinage de } a \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I,\ f(x) = \chi(x)\varphi(x)$$

Cette relation se note

$$f = \mathrm{O}_a(\varphi) \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \mathrm{O}_{x\to a}\big(\varphi(x)\big) \qquad \text{(notation de Landau)}$$

ou

$$f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\preccurlyeq} \varphi(x) \qquad \text{(notation de Hardy)}$$

(Si il n'y a pas d'ambigüité, on omettra d'indiquer le point a.)

Remarque. La notation $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ est impropre, car plusieurs fonctions différentes peuvent être dominées par une même fonction φ au voisinage de a, c'est-à-dire

$$f_1 = \mathrm{O}_a(\varphi) \quad , \quad f_2 = \mathrm{O}_a(\varphi) \qquad \text{avec } f_1 \neq f_2$$

Exemple. $\quad x = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(x^2) \quad , \quad 2x^2 = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(x^2) \quad , \quad x^2 = \mathrm{O}_{x\to 0}(x)$

Proposition 0.4 (Domination devant une constante non nulle)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction réelle définie sur I. Alors

$$f = \mathrm{O}_a(1) \iff f \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Proposition 0.5 (Caractérisation rapide)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I\backslash\{a\}$.

$$f = \mathrm{O}_a(\varphi) \iff \begin{cases} \dfrac{f}{\varphi} \text{ est bornée au voisinage de } a \\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \end{cases}$$

Proposition 0.6 (Règles opératoires de O_a)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{O}_a(\varphi)$, alors $f + g = \mathrm{O}_a(\varphi)$.
2. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ alors pour tout réel λ, $\lambda f = \mathrm{O}_a(\varphi)$.
3. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $fg = \mathrm{O}_a(\varphi\psi)$.
4. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{O}_a(\psi)$.
5. Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to b} h(x) = a \\ f = \mathrm{O}_a(\varphi) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ h = \mathrm{O}_b(\varphi \circ h)$$

Proposition 0.7 (Régles opératoires communes)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ alors $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$.
2. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $fg = \mathrm{o}_a(\varphi\psi)$.
3. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
4. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.

3. Comparaisons de référence

Proposition 0.8 (Puissances)**.** Soit α et β deux nombres réels. Alors

$$\alpha < \beta \iff x^\alpha = \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(x^\beta\right)$$
$$\alpha > \beta \iff x^\alpha = \mathrm{o}_{x\to0^+}\left(x^\beta\right)$$

Proposition 0.9 (Comparaisons logarithmes/puissances)**.** Pour tout réel α, on a :

$$\forall\beta > 0, (\ln x)^\alpha = \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(x^\beta\right)$$
$$\forall\gamma < 0, (\ln x)^\alpha = \mathrm{o}_{x\to0^+}\left(x^\gamma\right)$$

Proposition 0.10 (Comparaisons puissances/exponentielles)**.** Pour tout réel α, on a :

$$\forall a \in]1, +\infty[, x^\alpha = \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(a^x\right)$$
$$\forall a \in [0, 1[, a^x = \mathrm{o}_{x\to+\infty}\left(x^\alpha\right)$$

II. Équivalence

On rappelle ici l'intérêt des équivalents pour déterminer rapidement certaines limites dans le cas de formes indéterminées... à condition de les utiliser correctement!

1. Définition

Définition 0.3 (Équivalence)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

On dit que **f est équivalente à φ au voisinage de a** si et seulement si il existe une fonction réelle η définie sur I telle que

$$\lim_{x\to a}\eta(x)=1 \qquad \text{et} \qquad \forall x\in I,\ f(x)=\eta(x)\varphi(x)$$

Cette relation se note

$$f\underset{a}{\sim}\varphi \qquad \text{ou} \qquad f(x)\underset{x\to a}{\sim}\varphi(x)$$

(Si il n'y a pas d'ambigüité, on omettra d'indiquer le point a.)

Exemple. $\quad x^2+x\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2 \quad , \quad \sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$

Proposition 0.11 (Équivalence devant une constante non nulle)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction réelle définie sur I. Alors

$$\forall \ell\in\mathbb{R}^*,\ f\underset{a}{\sim}\ell \iff \lim_{x\to a}f(x)=\ell$$

Remarque. $f\underset{a}{\sim}0$ impliquerait que f s'annule sur I, ce qui est impossible par hypothèse.

$$\boxed{f\underset{a}{\sim}0 \text{ N'A AUCUN SENS!}}$$

Proposition 0.12 (Caractérisation rapide)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

$$f\underset{a}{\sim}\varphi \iff \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1\\ \varphi(a)=0\Longrightarrow f(a)=0\end{cases}$$

2. Règles opératoires

2. a. Cas général

Proposition 0.13 (Règles opératoires de $\underset{a}{\sim}$)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $g \underset{a}{\sim} \psi$, alors $fg \underset{a}{\sim} \varphi\psi$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{\varphi}$.
3. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $g \underset{a}{\sim} \psi$, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{\varphi}{\psi}$.
4. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f \underset{a}{\sim} \psi$.
5. Si f et φ sont positives sur I et $f \underset{a}{\sim} \varphi$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} \varphi^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
6. Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to b} h(x) = a \\ f \underset{a}{\sim} \varphi \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ h \underset{b}{\sim} \varphi \circ h$$

2. b. Addition

Remarque. « Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $g \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f+g \underset{a}{\sim} \varphi+\psi$ » est **fausse** dans le cas géneral.

Exemple. Au voisinage de $a=0$, $\begin{cases} x+x^2 \underset{0}{\sim} x \\ -x+x^2 \underset{0}{\sim} -x \end{cases}$. Mais

$$(x+x^2)+(-x+x^2) = 2x^2 \underset{0}{\not\sim} 0 = x+(-x)$$

$$\boxed{\text{ON NE PEUT PAS ADDITIONNER DES ÉQUIVALENTS N'IMPORTE COMMENT !}}$$

On peut toutefois isoler certains cas où cela est possible.

Proposition 0.14 (Addition d'équivalents)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$ et que :

$$f \underset{a}{\sim} \varphi \qquad \text{et} \qquad g \underset{a}{\sim} \psi$$

1. Si φ et ψ sont de <u>même signe constant</u> au voisinage de a, alors $f+g \underset{a}{\sim} \varphi+\psi$.
2. Si $\varphi : x \mapsto \lambda x^\alpha$ et $\psi : x \mapsto \mu x^\beta$, alors $f+g \underset{a}{\sim} \varphi+\psi$ <u>sauf si $\alpha=\beta$ et $\lambda+\mu=0$</u>.

2. c. Composition par la gauche

(La propriété 5 de la proposition 0.13 assure qu'il est possible de composer les équivalences par la droite.)

Remarque. La proposition

« Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $\varphi(a)$, et $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ \varphi$. »

est **fausse** en général.

Exemple. Au voisinage de $a = +\infty$, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Mais $e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^x$.

Proposition 0.15 (Composition à gauche par l'exponentielle)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$. Alors

$$\exp\circ f \underset{a}{\sim} \exp\circ\varphi \iff \lim_a (f-\varphi) = 0$$

Proposition 0.16 (Composition à gauche par le logarithme)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ soit strictement positive sur $I\backslash\{a\}$ et admette une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}\backslash\{1\}$. Alors

$$f \underset{a}{\sim} \varphi \Longrightarrow \ln\circ f \underset{a}{\sim} \ln\circ\varphi$$

Exemple. Au voisinage de $a = 0$, $1+x \underset{x\to0}{\sim} 1+2x$. Mais $x \underset{x\to0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to0}{\not\sim} \ln(1+2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$.

ON NE PEUT PAS PRENDRE LE LOGARITHME D'ÉQUIVALENTS N'IMPORTE COMMENT !

3. Lien avec o_a et O_a

Proposition 0.17. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, φ et ψ des fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
3. $f \underset{a}{\sim} \varphi \iff f - \varphi = \mathrm{o}_a(\varphi)$
4. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f = \mathrm{O}_a(\psi)$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{O}_a(\psi)$.
6. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(f)$.

Remarque. « Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(f)$ alors $f \underset{a}{\sim} \varphi$ » est **fausse** en général.

Exemple. Au voisinage de $a = +\infty$, $x = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(2x)$ et $2x = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(x)$. Mais $2x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x$.

4. Équivalents usuels

Proposition 0.18 (Cas simples de calcul d'équivalents)**.**

1. Tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$ ou $-\infty$.
   Tout polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré en 0.
2. Toute fraction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré en $\pm\infty$.
   Toute fraction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus bas degré en 0.
3. Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a) \cdot (x - a)$$

4. Si f admet un développement limité au voisinage de 0, alors f est équivalente au terme non nul de plus faible ordre en 0.

Exemple.

1. $x^4 + x^2 + 2x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^4$
   $x^4 + x^2 + 2x \underset{x \to 0}{\sim} 2x$
2. $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + 2x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{1}{x}$
   $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + 2x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{-x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$
3. Avec $f = \exp$ en $a = 0$:
$$e^x - 1 = \exp(x) - \exp(0) \underset{x \to 0}{\sim} \exp'(0) \cdot (x - 0) = x$$
4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots \underset{x \to 0}{\sim} x$

Théorème 0.1 (Équivalents des fonctions usuelles)**.**

$$
\begin{array}{ccc}
e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x & \\
\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x & \arcsin x \underset{x \to 0}{\sim} x & \operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x \\
\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x & \arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x & \operatorname{th} x \underset{x \to 0}{\sim} x \\
1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2} & & \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}
\end{array}
$$

Pour tout réel α fixé, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$

Remarque. La plupart des équivalents usuels sont exprimés au voisinage de 0. Pour obtenir des équivalents au voisinage d'une autre valeur finie a, il suffit d'effectuer un changement de variable du type $x = a \pm h$ avec h au voisinage de 0.

Exercice. *Déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
3. $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}$

Solution.

1. Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2\tan x = 0$ et $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$, on a $\ln(1+2\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\tan x$.
Comme $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, il vient que $\ln(1+2\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.
De plus $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$: on conclut alors que $\dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x}{x} = 2$, puis que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} = 2}$.

2. Passons au logarithme : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Donc
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\cdot\frac{1}{x} = 1$$
On conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$, puis (exp étant continue en 1) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e}$.

3. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{4} - h$ et on passe au logarithme :
$$\ln\left((\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}\right) = \frac{\ln\tan x}{\tan(4x)} = \frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\tan(\pi-4h)}$$
Étudions chacun des termes :
   - $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-h\right) = \dfrac{1-\tan h}{1+\tan h}$, donc $\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-h\right) = \ln(1-\tan h) - \ln(1+\tan h)$. Or
   $$\ln(1-\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \underset{h\to 0}{\sim} -h \qquad \text{et} \qquad -\ln(1+\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \underset{h\to 0}{\sim} -h$$
   On est dans les conditions de la propriété 2 de la proposition 0.14, donc
   $$\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right) = \ln(1-\tan h) - \ln(1+\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -2h$$
   - $\tan(\pi-4h) = \tan(-4h) \underset{h\to 0}{\sim} -4h$

   Donc $\ln\left((\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}\right) = \dfrac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\tan(\pi-4h)} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{-2h}{-4h} = \dfrac{1}{2}$.
On conclut que $\lim\limits_{x\to\pi/4} \ln\left((\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}\right) = \dfrac{1}{2}$, puis (exp étant continue en $1/2$) :
$$\boxed{\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)} = e^{1/2} = \sqrt{e}}$$

III. Développements limités au voisinage de 0

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\operatorname{th} x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\mathrm{o}\left(x^8\right)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\mathrm{o}\left(x^8\right)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$

Chapitre 0. Comparaison locale des fonctions réelles — TD

Exercice 0.1. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^t - 1}{1 - t + \ln(1+t)}$
2. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\ln t}{t - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x}$

Exercice 0.2. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1 - x^x} + \dfrac{1}{x \ln x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Exercice 0.3. *Déterminer des équivalents simples de :*

1. $x + \sin x$ *en* 0, *puis en* $+\infty$
2. $x - \sin x$ *en* 0, *puis en* $+\infty$
3. $\ln(\tan x)$ *en* 0^+, *puis en* $\dfrac{\pi}{4}$
4. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}$ *en* 0
5. $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$ *en* 0^+, *puis en* $+\infty$

Exercice 0.4. *Déterminer les équivalents en* 0 *de :*

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \arctan x}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1 - \operatorname{ch} x}{1 - \cos x}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x \ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$

Exercice 0.5. *Déterminer les équivalents en* $+\infty$ *de :*

1. $u_n = \dfrac{e^{1/n} - \cos\dfrac{1}{n}}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$
3. $u_n = \dfrac{\ln\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)}{\ln\left(\cos\dfrac{b}{n}\right)}$ *avec* a *réel et* b *réel non nul*
4. $u_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$
5. $u_n = \arctan n - \arccos\dfrac{1}{n}$
6. $u_n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\sin\left(\dfrac{n+1}{n^2+2}\right)}$
7. $u_n = e\cdot\sqrt{n^2-n+1} - n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 0.6. *Pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux, on note* $u_n = \left[\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}\right]^{n\ln n}$.

1. *Déterminer un équivalent de* $\ln u_n$ *en* $+\infty$.
2. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.