# Lois discrètes usuelles

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics and Finance

★★★

- $\Omega$ est un ensemble non vide.
- $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.
- Toutes les v.a.r. discrètes ci-après sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

## 1 Loi discrète uniforme

**Définition 1.1** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une v.a.r.d. $X$ suit une loi uniforme sur $E$ et on note*

$$X \sim \mathcal{U}_E$$

*si*

$$\begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \\ \bullet\ P(X = x) = \dfrac{1}{n}\ , \quad \forall x \in X(\Omega) \end{cases}$$

► $\mathcal{U}_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ *modélise un phénomène aléatoire ayant $n$ éventualités toutes équiprobables.*

Lorsque $E \subset \mathbb{Z}$ on utilise le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2** .
• *Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$. La loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, notée $\mathcal{U}_{[\![a,b]\!]}$ est donnée par :*

$$\forall k \in [\![a, b]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$$

• *En particulier, la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, notée $\mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ est donnée par :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

**Proposition 1.3** *Si $X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$, alors :*

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \textit{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

**Rappel** :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Exercice** : Soit $X$ une v.a.r.d. telle que $X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$.

**1.** Montrer que $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

**2.** Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$. Tracer l'allure de la courbe représentative de $F_X$.

## 2 Loi de Bernoulli

**Définition 2.1** *Soit $p \in [0,1]$ et $E = \{0,1\}$. On dit qu'une v.a.r.d. $X$ suit une loi de* Bernoulli *de paramètre $p$ et on note*

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

*si*

$$\begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = \{0,1\} \\ \bullet\ P(X=k) = p^k(1-p)^{(1-k)}\ , \quad \forall k \in X(\Omega) \end{cases}$$

▶ *$\mathcal{B}(p)$ modélise un phénomène aléatoire ayant exactement 2 éventualités :*

- *Succès (codé 1) de probabilité $p$*
- *Echec (codé 0) de probabilité $1-p$*

**Proposition 2.2** *Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors :*

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p)$$

**Exercice** : Soit $X$ une v.a.r.d. telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$.

**1.** Montrer que $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

**2.** Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$. Tracer l'allure de la courbe représentative de $F$.

**3.** Déterminer le moment d'ordre $m$ ($m \in \mathbb{N}$) de $X$.

## 3 Loi binomiale

**Définition 3.1** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $E = \{0,\ldots,n\}$. On dit qu'une v.a.r.d. $X$ suit une loi binomiale de paramètre $(n,p)$ et on note*

$$X \sim \mathcal{B}(n,p)$$

*si*

$$\begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = \{0,\ldots,n\} \\ \bullet\ P(X=k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ , \quad \forall k \in X(\Omega) \end{cases}$$

▶ *$\mathcal{B}(n,p)$ Modélise le nombre de succès obtenus à l'issue de $n$ épreuves successives et indépendantes de* Bernoulli *de même paramètre $p$.*

**Exemple** : Lancé de dé n fois

On lance un dé équilibré à six faces 10 fois (lancers indépendants). $X =$ «nombre de 6 obtenus» définie une v.a.r.d. qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 1/6)$.

**Proposition 3.2** *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors :*

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

**Remarque** : Soit $X$ une v.a.r.d. telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Soient $X_1, X_2, \ldots X_n$ ; $n$ v.a.r.d. indépendantes suivants une loi de Bernoulli de paramètre $p$ :

$$X_i \sim \mathcal{B}(p) \quad , \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$$

alors $X$ peut s'écrire

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

**Exercice** : Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

**1.** Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$.

**2.** Montrer que $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

# 4 Loi géométrique

**Définition 4.1** *Soit $p \in ]0,1]$. On dit qu'une v.a.r.d. $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ et on note*

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

*si*

$$\begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \bullet\ P(X=k) = (1-p)^{k-1}p\ , \quad \forall k \in X(\Omega) \end{cases}$$

▶ *$\mathcal{G}(p)$ modélise le rang d'occurrence du premier succès lors d'épreuves successives et indépendantes de* Bernoulli *de même paramètre $p$. Par exemple :*

• *$X$ = « nombre de lancers nécessaires d'une pièce pour obtenir pile », $p$ étant la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer.*

**Proposition 4.2** *Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors :*

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

**Exercice** : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

**1.** Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

**2.** Montrer que $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$. [Indication : pour $V(X)$, calculer $E(X(X-1))$].

**3.** Calculer $P(X \leq k)$ et en déduire la fonction de répartition de $X$.

# 5 Loi de Poisson

**Définition 5.1** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. On dit qu'une v.a.r.d. $X$ suit une de loi* Poisson *de paramètre $\lambda$ et on note*

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

*si*

$$\begin{cases} \bullet\ X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \bullet\ P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\ , \quad \forall k \in X(\Omega) \end{cases}$$

▶ *$\mathcal{P}(\lambda)$ Modélise le nombre d'occurrences d'un événement se produisant dans un intervalle de temps fixé. Par exemples :*

• *$X$ = « nombre de connexion à un site pendant une heure », $\lambda$ étant leur moyenne.*

• *$X$ = « nombre d'appels reçu par un standard pendant 1 minute », $\lambda$ étant leur moyenne.*

• *$X$ = « nombre d'accidents mortels par jour dans un pays », $\lambda$ étant leur moyenne.*

*$\mathcal{P}(\lambda)$ est utilisée dans la gestion des files d'attente.*

**Proposition 5.2** *Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors :*

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

**Exercice** : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

**1.** Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$.

**2.** Montrer que $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$. [Indication : pour $V(X)$, calculer $E(X(X-1))$].