



PROBABILITÉS ET SIMULATIONS

**Hassan Maatouk, Jean-Michel Masereel, Thi-Hien
Nguyen**

Table des matières

1	Espaces probabilisés	5
1.1	Tribus	5
1.2	Espaces probabilisables	6
1.3	Espaces probabilisés	8
1.3.1	Définition	8
1.3.2	Exemple : Fréquence d'apparition et probabilité	8
1.3.3	Propriétés	9
1.4	Conditionnement et indépendance	10
1.4.1	Conditionnement	10
1.4.2	Événements indépendants	14
2	Variables aléatoires réelles continues	17
2.1	Variable aléatoire réelle à densité	17
2.1.1	Fonction de répartition d'une VAR à densité	18
2.2	Moments d'une VAR à densité	20
2.2.1	Espérance	20
2.2.2	Variance et écart-type	21
2.3	Variables aléatoires réelles indépendantes	22
2.4	Lois à densité usuelles	23
2.4.1	Loi Uniforme	23
2.4.2	Loi exponentielle	24
2.4.3	Loi normale ou Loi de GAUSS	26
3	Couples de variables aléatoires réelles	29
3.1	Cas général	29
3.1.1	Définition	29
3.2	Cas discret	31
3.2.1	Loi de couple	31
3.2.2	Lois marginales	31
3.2.3	Fonction de répartition	32
3.2.4	Loi conditionnelle	32
3.2.5	Théorème de transfert	32
3.2.6	Covariance d'un couple aléatoire réel discret	34
3.2.7	Coefficient de corrélation linéaire d'un couple aléatoire réel discret	34
3.3	Cas à densité	38
3.3.1	Loi de couple	38
3.3.2	Lois marginales	38
3.3.3	Fonction de répartition	38
3.3.4	Densités conditionnelles	39
3.3.5	Loi uniforme	39

3.3.6	Loi conjointe de deux v.a.r. indépendantes	42
3.3.7	Théorème de transfert	42
3.3.8	Covariance d'un couple aléatoire réel à densité	43
3.3.9	Coefficient de corrélation linéaire d'un couple aléatoire réel à densité	43
4	Convergence	47
4.1	Rappel	47
4.2	Convergences	47
4.2.1	Convergence en loi	47
4.2.2	Convergence en probabilité	48
4.2.3	Convergence presque sûre	49
4.2.4	Convergence en moyenne et en moyenne quadratique	50
4.3	Somme de variables aléatoires réelles indépendantes	53
4.3.1	Définitions	53
4.3.2	Loi des grands nombres	53
4.3.3	Théorème central limite	54
5	Introduction à la simulation	57
5.1	Simulation de variables aléatoires réelles	57
5.1.1	Générateur de nombres pseudo-aléatoires standard	57
5.1.2	Définition	57
5.1.3	Situation idéale	57
5.2	Simulations directes	58
5.2.1	Loi uniforme continue	58
5.3	Simulation par inversion de la fonction de répartition	58
5.3.1	Résultat fondamental	58
5.3.2	Exemple : loi exponentielle	59
5.3.3	Extension aux VARs discrètes	59
5.4	Travaux pratiques	61

Chapitre 1

Espaces probabilisés

1.1 Tribus

Dans cette section, I est une partie de \mathbb{N} .

Définition 1.1 (Ensemble dénombrable). On dit qu'un ensemble E est dénombrable lorsqu'il existe une bijection d'une partie de \mathbb{Z} dans E . \square

Exemple 1.1.

- \mathbb{N} et \mathbb{Z} sont dénombrables ainsi que \mathbb{Q} .
- \mathbb{R} et \mathbb{C} ne sont pas dénombrables. \square

Définition 1.2 (Cardinal). On dit qu'un ensemble E est fini lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}_*$ et une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans E .
On appelle cardinal de E , que l'on note $Card(E)$ ou $\#E$ ou encore $|E|$ cet entier n .
Par convention, on pose $Card(\emptyset) = 0$ \square

Définition 1.3 (Tribu). Soit Ω un ensemble. Une tribu sur Ω est un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$:

- Contenant Ω : $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Stable par réunion dénombrable : $\forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$. \square

Propriété 1.1. Soit Ω un ensemble. Toute tribu sur Ω est stable par intersection dénombrable. \square

Démonstration. Soit \mathcal{A} est un tribu sur Ω et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n}$ \square

Propriété 1.2 (Tribus particulières). Soit Ω une ensemble.

1. Toute tribu sur Ω contient \emptyset et Ω .
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω appelée tribu grossière sur Ω ou tribu triviale sur Ω .

3. Soit A une partie non vide de Ω . Alors $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω . □

Démonstration. Évident □

Définition 1.4 (Tribu borélienne). On appelle tribu borélienne sur \mathbb{R} la tribu engendrée par les intervalles ouverts de \mathbb{R} . On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et ses éléments sont appelés boréliens □

Propriété 1.3. La tribu de Borel sur \mathbb{R} est la tribu engendrée par tout type d'intervalle. En particulier par les intervalles de la forme $]a; b]$ ou de la forme $] - \infty; b]$. On note :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{]a; b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}) \\ &= \sigma(\{] - \infty; b] : b \in \mathbb{R}\}). \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 1.1. La tribu de Borel sur \mathbb{R} contient :

- Tous les intervalles et tous les singletons de \mathbb{R} .
- Tous les ensembles définies par des intersections finies ou infinies dénombrables des intervalles ou de leur complémentaires.
- Tous les ensembles définies par des réunions finies ou infinies dénombrables des intervalles ou de leur complémentaires. □

1.2 Espaces probabilisables

Définition 1.5 (Espace probabilisable). Un espace probabilisable est un couple $(\Omega; \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur Ω .

- Un événement est un élément de \mathcal{A} .
- Un événement élémentaire est un événement à un seul élément. □

Remarque 1.2. Attention, un élément de Ω ne sera jamais un événement □

Définition 1.6 (vocabulaire).

1. On appelle *expérience aléatoire* une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat : si on répète l'expérience dans les mêmes conditions, le résultat pourra être différent. Par contre on connaît tous les résultats possibles.
2. On appelle *issue* ou *éventualité* le résultat d'une expérience aléatoire.
3. On appelle *univers* l'ensemble des issues possibles. □

Définition 1.7 (Événements). Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

- L'ensemble \mathcal{A} est appelé tribu des événements.
- Les éléments de \mathcal{A} s'appellent les événements.
- Les singletons de Ω (lorsqu'ils sont dans \mathcal{A}) s'appellent les événements élémentaires.
- L'événement ω est appelé événement certain.
- L'événement \emptyset est appelé événement impossible. □

Remarque 1.3. Tout ensemble A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Définition 1.8 (Événement contraire). Soit A un événement d'une expérience aléatoire. On appelle *événement contraire de A* l'événement noté \bar{A} qui est réalisé lorsque A n'est pas réalisé. \square

Définition 1.9. Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire.

1. On appelle disjonction de A et B l'événement qui se réalise lorsque A ou B se réalise. On le note $A \cup B$.
2. On appelle conjonction de A et B l'événement qui se réalise lorsque A et B se réalisent en même temps. On le note $A \cap B$. \square

Définition 1.10 (Événements incompatibles). Soit A et B deux événements d'une expérience aléatoire. On dit que A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$. \square

Définition 1.11 (Implications). Soit A et B deux événements. On dit que A implique B lorsque B se réalise chaque fois que A se réalise, c'est-à-dire $A \subset B$. \square

Définition 1.12 (Système complet d'événements). Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probablistable. On dit qu'une famille dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ forme un système complet d'événements sur (Ω, \mathcal{A}) si les A_i sont deux à deux incompatibles et recouvrent Ω . C'est-à-dire :

- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. \square

Remarque 1.4. Un système complet d'événement est donc une partition dénombrable de Ω constituée uniquement d'éléments de \mathcal{A} . \square

Remarque 1.5.

1. Si Ω est fini ou infini dénombrable, on prendra toujours (sauf dans des cas rares) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\omega)$.
2. si $\omega = \mathbb{R}$, on prendra toujours $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Si Ω est infini non dénombrable (et différent de \mathbb{R}), on prendra comme tribu, la tribu engendrée par les événements qu'on souhaite étudier. \square

Propriété 1.4. Soit Ω un ensemble dénombrable. Alors $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. \square

Démonstration. Évident. \square

1.3 Espaces probabilisés

1.3.1 Définition

Définition 1.13 (Probabilité). Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) toute application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour toute famille dénombrable $(A_n)_n$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\sum_n P(A_n) \text{ converge} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

On dit que (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé.

Pour tout événement A on appelle probabilité de A le réel $P(A) \in [0; 1]$. □

1.3.2 Exemple : Fréquence d'apparition et probabilité

Définition 1.14 (Fréquence d'apparition). Soit A un événement. On note $r_A(n)$ le nombre de fois que l'événement A s'est réalisé parmi les n répétitions d'une expérience aléatoire. La fréquence d'apparition de A , notée $f_A(n)$, est définie par $f_A(n) = \frac{r_A(n)}{n}$. □

Propriété 1.5. Soit A et B deux événements d'un univers Ω et $n \in \mathbb{N}$.

1. $f_A(n) \in [0, 1]$.
2. $f_\Omega(n) = 1$.
3. $f_{\bar{A}}(n) = 1 - f_A(n)$.
4. Si A et B sont incompatibles, alors $f_{A \cup B}(n) = f_A(n) + f_B(n)$. □

Démonstration.

1. $r_A(n) \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
2. L'événement certain se réalise à chaque expérience, donc $r_\Omega(n) = n$.
3. \bar{A} se réalise à chaque fois que A ne se réalise pas. Donc $r_{\bar{A}}(n) = n - r_A(n)$.
4. Aucune répétition de l'expérience ne permet de réaliser A et B en même temps, donc $r_{A \cup B}(n) = r_A(n) + r_B(n)$. □

Remarque 1.6. Donc $f_\emptyset(n) = 1 - f_\Omega(n) = 0$. □

Propriété 1.6 (Probabilité). Soit P l'application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_A(n).$$

(C'est la fréquence d'apparition limite obtenue lors de la répétition infinie de l'expérience).
L'application P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. □

Démonstration. — L'application P va de $\mathcal{P}(\omega)$ dans $[0; 1]$.

— $P(\Omega) = 1$.

— Pour deux événements incompatibles, nous avons $P(A \cup B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{A \cup B}(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_A(n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} f_B(n) = P(A) + P(B)$. Par récurrence, on montre la formule pour une famille dénombrable. La convergence de la série est admise. \square

1.3.3 Propriétés

Propriété 1.7 (Opérations). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, et A et B deux événements. Alors :

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ (on dit qu'une probabilité est croissante).
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. Si $(A_n)_n$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$. \square

Propriété 1.8. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) = \sum_{i=0}^n P(A_i).$$

Propriété 1.9 (Limite monotone). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'événements, alors $(P(A_n))_n$ est une suite convergente et

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Si $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'événements, alors $(P(A_n))_n$ est une suite convergente et

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Démonstration. Nous avons $A_n \subset A_{n+1} \subset \Omega$. Donc par croissance de P , $P(A_n) \leq P(A_{n+1}) \leq P(\Omega) = 1$. Donc la suite $(P(A_n))_n$ est une suite numérique croissante, majorée par 1, donc convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=0}^n A_i = A_n$. Donc, en passant à la limite, $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$. \square

Corollaire 1.1. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Soit $(A_n)_n$ une famille dénombrable d'événements.

1. $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.
2. $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$. \square

Démonstration. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$ $B_p = \bigcup_{n=0}^p A_n$. Alors $(B_p)_p$ est une famille dénombrable croissante d'événements et $\bigcup_{p=0}^n B_p = B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$. Donc en passant à la limite, $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\bigcup_{i=0}^n A_i)$. \square

Propriété 1.10 (Inégalité de Boole). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Pour toute famille dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ telle que $\sum_{i \in I} P(A_i)$ converge,

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Démonstration. Admis. \square

Définition 1.15 (Événement négligeable / presque sûr). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit

- négligeable si et seulement si $P(A) = 0$.
- presque sûr si et seulement si $P(A) = 1$. \square

Remarque 1.7. Un événement presque sûr n'est pas nécessairement certain ($P(A) = P(\Omega) = 1$, mais $A \neq \Omega$). De même, un événement négligeable n'est pas forcément impossible. Par exemple, si on effectue un nombre infini de lancers d'un pièce équilibrée, l'événement "on n'obtient jamais pile" est négligeable, mais pas impossible. En effet, soit A_k l'événement "les k premiers lancers donnent des faces". Alors (A_n) est une famille dénombrable décroissante d'événements. Donc

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Propriété 1.11. Toute réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable. \square

Démonstration. Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements négligeables : $\forall n, P(A_n) = 0$, alors la série de terme général $P(A_n)$ est la série constante nulle, donc est convergente de somme nulle.

De plus, $0 \leq P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 0$. D'où la propriété. \square

1.4 Conditionnement et indépendance

1.4.1 Conditionnement

Supposons que l'on prenne un élève de l'école au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit en prépa? La section précédente nous a permis de répondre à cette question. Cependant, une fois l'élève pris au hasard, on se rend compte qu'il a des lunettes. Est-ce que la probabilité change? Si oui, comment la calculer? Autre question : les personnes atteintes de la maladie M_1 présentent le symptôme S_1 dans 80% des cas et le symptôme S_2 dans 20% des cas. Celles

atteintes de la maladie M_2 présentent le symptôme S_1 dans 40% des cas et le symptôme S_3 dans 60% des cas. Un patient se présente chez son médecin avec le symptôme S_1 . De quelle maladie souffre-t-il ? On aurait envie de dire M_1 , mais ce serait une grosse erreur. En effet la probabilité qu'il soit atteint de la maladie M_1 dépend de la probabilité d'apparition de cette maladie dans la population : imaginez que la maladie M_1 ne touche qu'une personne sur 1 million...

Dans cette section nous allons tenter de répondre à ces deux questions.

Définition 1.16 (Probabilité conditionnelle). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriété 1.12. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A} &\rightarrow [0; 1] \\ A &\mapsto P_B(A). \end{aligned}$$

est une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) . □

Démonstration. — Vérifions tout d'abord que P_B est à valeur dans $[0; 1]$: $P_B \geq 0$ puisque c'est un quotient de probabilité. Ensuite, par croissance de probabilité P et du fait que $A \cap B \subset B$, nous avons $P(A \cap B) \leq P(B)$. Donc, $P_B(A) \leq 1$.

— Ensuite, $P_B(\Omega) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

— Enfin, soit $(A_n)_n$ une famille d'événements incompatibles deux à deux. Donc la famille $(A_n \cap B)_n$ aussi et la série $\sum P(A_n \cap B)$ est convergente. De plus :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B).$$

Donc la série $\sum \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum P_B(A_n)$ est convergente et

$$\frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n).$$

Or, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B) = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B$. D'où

$$P_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n).$$

D'où le résultat. □

Remarque 1.8. Cette propriété 1.12 nous permet de conclure que la probabilité conditionnelle vérifie toutes les propriétés d'une probabilité (notamment les propriétés 1.7 et 1.8). □

Propriété 1.13. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$. Alors

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

Démonstration. Cela vient directement de la définition de la probabilité conditionnelle. \square

Remarque 1.9. Si $P(A) \neq 0$, on peut écrire aussi $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$. \square

Théorème 1.1 (Probabilité composée). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et A_1, A_2, \dots, A_n des événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Démonstration. Cela se montre par récurrence en utilisant la propriété 1.13. Il suffit de remarquer que $A_1 \cap \dots \cap A_n = A_n \cap (A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$, ainsi $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$. L'hypothèse de récurrence et le fait que la propriété est vraie pour deux ensembles permettent de conclure. \square

Corollaire 1.2. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une famille dénombrables d'événements telle que pour tout n , $A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n$ n'est pas un événement presque sûrement impossible. Alors

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_0)P_{A_0}(A_1) \dots P_{A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= P(A_0) \prod_{n=0}^{+\infty} P_{A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n). \end{aligned} \quad \square$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété de la limite monotone puis la formule de probabilités composées. \square

Théorème 1.2 (Formule des probabilités totales). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable constituant un système complet d'événements telle que $\forall i \in I, P(A_i) \neq 0$. Alors pour tout événement B

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que puisque tous les événements sont de probabilité non nulle, les probabilités conditionnelles de la formule sont bien définies.

Puisque la famille (A_i) forme un système complet, nous avons $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. Ainsi, $B = B \cap \Omega =$

$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$. Or les A_i étant deux à deux disjoints, les $B \cap A_i$ aussi, ainsi

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i).$$

Remarque 1.10.

- Cette formule est souvent utilisée dans le cas $n = 2$: Si A est de probabilité non nulle et différente de 1, alors (A, \bar{A}) forme un système complet d'événements de probabilités non nulles. Ainsi, pour tout événement B

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})(1 - P(A)).$$

- Cette formule peut vous sembler difficile, mais en réalité vous l'avez déjà rencontrée en terminale avec les arbres (voir Figure 1.1).

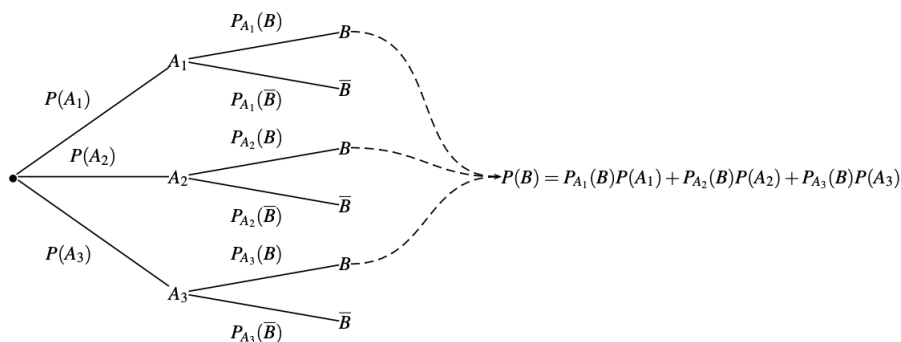


FIGURE 1.1 – Arbre de probabilité

Théorème 1.3 (Formule de Bayes (1)). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Démonstration. Évident. □

Théorème 1.4 (Formule de Bayes (2)). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable formant un système complet d'événements non presque sûrement impossibles, alors pour tout événement B non presque sûrement impossible et tout indice $j \in I$,

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Démonstration. Cela découle simplement de la formule de Bayes (1). Le dénominateur est simplement obtenu en utilisant la formule des probabilités totales. □

Remarque 1.11. La formule de Bayes permet “d’inverser” les probabilités conditionnelles. C’est-à-dire, elle permet de calculer $P(A|B)$ lorsque l’on connaît $P(B|A)$. □

Exemple 1.2. Reprenons l'exemple introductif avec les malades. On va modifier un peu l'énoncé. On suppose qu'un malade atteint de la maladie M_1 présente les symptômes S_1 dans 80% des cas ($P(S_1|M_1) = 0.8$). Une personne non atteinte de la maladie M_1 présente ces mêmes symptômes dans 40% des cas ($P(S_1|\bar{M}_1) = 0.4$). Enfin, 40% de la population est

atteinte de la maladie M_1 ($P(M_1) = 0.4$). Avec toutes ces données, le médecin doit évaluer la probabilité que son patient soit atteint de la maladie M_1 ($P(M_1|S_1)$).

Puisque $(M_1; \bar{M}_1)$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles, nous avons

$$P(M_1|S_1) = \frac{P(S_1|M_1)P(M_1)}{P(S_1)} = \frac{P(S_1|M_1)P(M_1)}{P(S_1|M_1)P(M_1) + P(S_1|\bar{M}_1)P(\bar{M}_1)}.$$

D'où

$$P(M_1|S_1) = \frac{0.8 \times 0.4}{0.8 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6} = \frac{4}{7} \simeq 57\%.$$

Le médecin peut donc supposer que le patient est atteint de la maladie M_1 avec une marge d'erreur qui reste importante (43%). Si la fréquence d'apparition de la maladie M_1 était de 85% nous aurions $P(M_1|S_1) \simeq 92\%$, par contre si la fréquence d'apparition était de 10% nous aurions $P(M_1|S_1) \simeq 18\%$. \square

1.4.2 Événements indépendants

Définition 1.17 (événements indépendants). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont *indépendants* pour la probabilité P si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. \square

Remarque 1.12. Attention de ne pas confondre indépendance et incompatibilité (ce que vous faites souvent). Si deux événements sont incompatibles, alors ils sont dépendants, en effet dans ce cas $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$. \square

Propriété 1.14. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, A et B deux événements. Si $P(B) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$. \square

Démonstration. Cela découle directement de la définition. \square

Remarque 1.13. Lorsque $P(B) \neq 0$, on retrouve la définition intuitive de l'indépendance : La probabilité de A ne dépend pas de la réalisation de B . \square

Propriété 1.15. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements indépendants, alors :

1. A et \bar{B} sont indépendants.
2. \bar{A} et B sont indépendants.
3. \bar{A} et \bar{B} sont indépendants. \square

Démonstration.

1. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(\bar{B})$.
2. $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(\bar{A})$.
- 3.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(\bar{A}) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(\bar{A})(1 - P(B)) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}). \end{aligned} \quad \square$$

Définition 1.18 (Famille d'événements mutuellement indépendants). Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'événements. On dit que les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont

- deux à deux indépendants lorsque A_i et A_j sont indépendants pour tout $i \neq j$.
- mutuellement indépendants lorsque pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Remarque 1.14.

1. Pour prouver que trois événements A , B et C sont mutuellement indépendants, il faut montrer que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

2. L'indépendance mutuelle entraîne donc l'indépendance deux à deux. Par contre la réciproque est fautive : Soit $\Omega = \llbracket 1; 4 \rrbracket$ et P la probabilité uniforme. Posons $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3\}$. Alors $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. Donc A , B et C sont deux à deux indépendants. Par contre $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$. Ils ne sont donc pas mutuellement indépendants.
3. Il est toujours plus aisé de calculer des probabilités d'intersection lorsque les événements sont indépendants. □

Exemple 1.3. On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie bien équilibrée. Déterminer la probabilité que "Face" apparaisse pour la première fois au quatrième lancer. □

Démonstration. On suppose que tous les lancers sont indépendants (mutuellement). Notons F_i = "le lancer i donne Face" et P_i = "le lancer i donne Pile". Nous cherchons donc à calculer $P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. □

Propriété 1.16. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'événements mutuellement indépendants, alors toute famille indexée par $J \subset I$, composée d'événements A_i ou $\overline{A_i}$ pour chaque indice, est formée d'événements mutuellement indépendants. □

Démonstration. Admis. □

Remarque 1.15. Cela veut dire qu'échanger un ou plusieurs événement par son contraire dans une famille d'événements mutuellement indépendants ne change pas l'indépendance mutuelle. □