

Rédigé par : l'équipe pédagogique du module Algo. Scientifique I

Ref : *ING1-GM-EX-ALG-SCI*

A l'intention de : Etudiants des ING1-GM

Créé le : 10/01/2015

## 1. Préambule

Cet examen dure 2h00. L'examen se fait sur feuilles. Tous les documents papiers sont autorisés. L'ordinateur est interdit. On vous demande de mentionner dans votre copie le libellé de votre groupe.

## 2. Algorithme mystère (8 pts)

Vous récupérez sur internet une fonction écrite dans un cours d'Algorithmique Scientifique. Vous constatez que les notations diffèrent quelque peu des nôtres et qu'il n'est pas commenté mais vous êtes un(e) futur(e) ingénieur(e). On se propose de trouver ce que fait cette fonction en répondant à plusieurs questions.

```

Fonction  calcul(A)
  v ← 0
  [m, n] ← taille(A)
  Si n ≠ m
    message d'erreur « n ≠ m »
  Finsi
  Si n = 1 ou m = 1
    v ← A
    retourner v
  Fin Si
  L ← vecteur nul(n)
  Pour i=1 à n
    L(i) ← i
  Finpour
  B ← matrice nulle(n-1, n-1)
  Pour j=1 à n
    B ← A(privé de la ligne 1 et de la colonne j)
    v ← v + (-1)(i+1) * A(1, j) * calcul(B)
  Finpour
  retourner v
Fin Fonction

```

- 1) Quel est le type de  $v$  ?
  - a. Booléen
  - b. Polynôme
  - c. Matrice
  - d. Réel
  - e. Chaîne
  
- 2) Quel est le type de  $A$  ?
  - a. Booléen
  - b. Polynôme
  - c. Matrice
  - d. Réel
  - e. Chaîne
  
- 3) On remarque que la fonction *calcul* s'appelle elle-même.  
Comment appelle-t-on ce type de fonction ?

## ING 1-GM : EXAMEN D'ALGORITHMIQUE SCIENTIFIQUE

4) Tester manuellement **calcul** avec les données suivantes :

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Qu'obtient-on pour  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ ?

5) Que fait finalement cette fonction ?

6) En fonction de la nature de  $A$ , citer une autre manière d'effectuer rapidement ce même calcul.

### 3. Diagonalisation d'une matrice symétrique définie positive (12 pts)

On considère  $A$  une matrice symétrique définie positive. Une matrice vérifiant ces propriétés a toutes ces valeurs propres réelles et strictement positives.

On définit la suite de vecteurs comme suit :

- $v_0$  quelconque tels que  $\langle v_0, v_0 \rangle = 1$
- $\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{A.v_{n-1}}{\|A.v_{n-1}\|}$  où  $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$

1) Montrer que si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $v$  alors  $v$  est vecteur propre unitaire de la matrice  $A$ .

Pour la suite, on admet que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Pour information, le vecteur  $v$  est un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de  $A$ .

On recense les fonctions suivantes :

- La fonction appelée **norme** qui reçoit un vecteur  $w$  sous la forme d'un tableau de réel pour les coordonnées et d'un entier  $n$  pour la dimension et qui retourne la norme du vecteur  $w$ .
- La fonction appelée **diffVecteur** qui reçoit deux vecteurs  $w_1$  et  $w_2$  sous la forme de deux tableaux pour les coordonnées et d'un entier  $p$  pour la dimension commune des deux vecteurs et qui retourne le vecteur  $w_1 - w_2$  sous la forme d'un tableau de réel à une dimension.
- La fonction appelée **chercherVecteurPropre** qui reçoit la matrice  $A$  sous la forme d'un tableau de réels à 2 dimensions, d'un entier pour les dimensions communes de la matrice (car elle est carrée), d'un nombre réel  $\varepsilon$  pour une précision et qui retourne l'approximation de la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à  $\varepsilon$  près. La limite à  $\varepsilon$  près signifie qu'on arrête la boucle quand  $\|v_n - v_{n-1}\| < \varepsilon$ .

2) Ecrire l'algorithme de la fonction **chercherVecteurPropre** en utilisant les deux fonctions **norme** et **diffVecteur**.

On note  $\lambda_1$  la valeur propre associée au vecteur limite  $v$  défini ci-dessus. On définit la matrice  $A_2$  suivante :

$$A_2 = A - \lambda_1 v.v^T$$

3) Montrer que  $v$  est vecteur propre de la matrice  $A_2$  associée à la valeur propre 0.

4) Montrer  $A_2$  est symétrique.

5) Montrer que tout vecteur propre  $w$  de  $A$  orthogonal à  $v$  est un vecteur propre de  $A_2$ .

6) On admet que  $A_2$  est définie positive. En déduire qu'en utilisant **chercherVecteurPropre** avec la matrice  $A_2$ , on peut trouver un deuxième vecteur propre (approximé de  $A$ )

7) Ecrire la fonction **chercherNVecteursPropres** qui généralise ce qui vient d'être vu ci-dessus. Cette fonction renvoie  $n$  vecteurs propres (approximés) où  $n$  est la dimension de la matrice carrée  $A$ .