EISTI Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	**ING2-MI : EXAMEN DE SIMULATION ET PROCESSUS STOCHASTIQUES**

Rédigé par : Hervé de Milleville	Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*
A l'intention de : Etudiants des ING2-MI	Créé le : 02/11/2014

Préambule

Cet examen dure 1h30. Le rendu de l'examen est une copie papier. Pendant cette épreuve, seuls les documents papiers sont autorisés et votre pc en local.

Approximation d'une probabilité

On considère X une variable aléatoire gaussienne $N(m,\sigma^2)$. On vous rappelle que la fonction de densité de la variable x est donnée par $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2.\sigma^2}}$. On cherche à calculer $P(X\in[a,b])$ où a et b sont deux nombres réels quelconques. On ne sait pas trouver une primitive de f, on se propose donc d'approximer cette probabilité par simulation.

- Ecrire en pseudo code, un algorithme de simulation permettant d'approximer $P(X\in[a,b])$.

Processus de Poisson : questions de réflexion

Une partie de la définition d'un processus de Poisson est donnée par $\begin{cases} P(N_{t+h}-N_t=1)=\lambda h+o(h) \\ P(N_{t+h}-N_t>1)=o(h) \end{cases}$.

1) Que cela change-t-il dans le processus si on remplace la propriété $P(N_{t+h}-N_t=1)=\lambda h+o(h)$ par $P(N_{t+h}-N_t=1)=\lambda^2 h+o(h)$?
2) Que cela change-t-il dans le processus si on remplace la propriété $P(N_{t+h}-N_t>1)=o(h)$ par $P(N_{t+h}-N_t>1)=o(h^2)$?

Chaîne de Markov : Marche aléatoire

On observe un animal se déplacer sur une demi-droite infinie. On note O le point initial. A l'instant 0, l'animal se trouve au point O. A chaque étape, il peut reculer d'un pas ou rester sur place ou avancer d'un pas. On note Pos_n la position de l'animal à l'instant n.

1) A l'étape *n* (*n* $\geq$ *1*), s'il peut reculer alors il recule avec une probabilité égale à $\frac{1}{2.Pos_{n-1}+1}$ et dans tous les cas de figures il avance avec une probabilité $\frac{1}{3.Pos_{n-1}+1}$.
   a. Montrer que $(Pos_n)_{n\in N}$ est une chaîne de Markov homogène.
   b. Trouver les états possibles de cette chaîne de Markov.
   c. Trouver la matrice de transition.
   d. Trouver les classes d'états.
   e. Etudier son comportement asymptotique.

2) On change le comportement.
   A l'étape 1, quoiqu'il arrive, l'animal avance d'un pas.
   A l'étape *n* ($n \geq 2$), s'il peut reculer alors il recule avec une probabilité égale à $\frac{1}{2.Max(Pos_{n-1}, Pos_{n-2})+1}$ et dans tous les cas de figures il avance avec une probabilité égale à $\frac{1}{3.Max(Pos_{n-1}, Pos_{n-2})+1}$.
   a. Montrer que $(Pos_n)_{n \in N}$ n'est pas une chaîne de Markov.
   b. On pose $Y_n = (Pos_n, Pos_{n-1})$ pour n ≥ 1 et $Y_0 = (0,0)$. Montrer que $(Y_n)_{n \in N}$ est une chaîne de Markov.
   c. Chercher les états et les classes de cette chaîne.

Processus de Poisson conditionné

On étudie le passage de voitures devant une pompe à essence. On note X_t le nombre de voitures qui sont passées devant la pompe à essence à l'instant t. On suppose que $(X_t)_{t \in R}$ est un processus de Poisson d'intensité λ. Une fois arrivée à la pompe, on suppose que chaque voiture a une probabilité p de s'arrêter à la pompe. On note Y_t le nombre de voitures qui se sont arrêtées à la pompe dans l'intervalle de temps $[0,t]$ et Z_t celles qui sont passées devant la pompe sans s'arrêter dans l'intervalle de temps $[0,t]$.

1) Montrer que $(Y_t)_{t \in R}$ est un processus de Poisson de paramètre λp.
2) Montrer que $(Z_t)_{t \in R}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.
3) En ignorant le résultat précédent, écrire le pseudo-code de la fonction qui reçoit les paramètres λ, p et n et qui renvoie dans un tableau, les instants d'arrivée à la pompe des n premières voitures qui se sont arrêtées à la pompe à essence (on rappelle que dans un processus de Poisson d'intensité λ, le temps séparant deux arrivées successives est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ).