

Rédigé par : Hervé de Milleville

Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*

A l'intention de : Etudiants des ING2-MI

Créé le : 02/11/2014

### Préambule

Cet examen dure 1h30. Le rendu de l'examen est une copie papier. Pendant cette épreuve, seuls les documents papiers sont autorisés et votre pc en local.

### Simulation d'une chaîne de Markov

On veut programmer des outils de simulation pour étudier empiriquement des propriétés de chaînes de Markov. Pour simplifier, un état sera représenté par un nombre entier supérieur ou égal à 1.

1. Ecrire une fonction qui simule la transition en  $n$  étapes. On vous donne la signature de la fonction :  
*Fonction transitionNEtapes(etat0 : Entier, matTransition : Tableau de Reel(N,N) , nbEtats : Entier, n : Entier) : Entier.*  $n$  représente le nombre d'étapes.
2. Ecrire une fonction qui permet de vérifier qu'un état est absorbant. On vous donne la signature de la fonction : *Fonction estAbsorbant(etat : Entier, matTransition : Tableau de Reel(N,N) , nbEtats : Entier) : Booleen.*
3. On considère une chaîne de Markov avec au moins un état absorbant. Ecrire une fonction qui simule le temps d'absorption d'un état par un état absorbant. On vous donne la signature de la fonction :  
*Fonction tempsAbsorption(etat0 : Entier, matTransition : Tableau de Reel(N,N) , nbEtats : Entier) : Entier.*
4. On considère une chaîne de Markov avec au moins un état absorbant. Ecrire une fonction qui approxime le temps moyen d'absorption d'un état par un état absorbant. On vous donne la signature de la fonction :  
*Fonction tempsAbsorptionMoyen(etat0 : Entier, matTransition : Tableau de Reel(N,N) , nbEtats : Entier) : Entier.*

Pour le pseudo-code :

- On dispose d'une fonction nommée `random()` qui simule une variable uniforme sur  $[0,1]$ .
- Pour accéder à la case  $(i,j)$  d'un tableau  $t$  à 2 dimensions, on écrit `t[i,j]`.

### Processus de Poisson : questions de réflexion

On observe un processus de comptage. On fait les constatations suivantes :

- Il a les mêmes propriétés à l'exception de celle sur les évènements rares.
- La probabilité qu'il y ait une arrivée dans un intervalle de temps  $[t, t+h]$  est équivalent de  $\lambda \cdot \sqrt{h}$  au voisinage de 0.

Rédigé par : Hervé de Milleville

Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*

A l'intention de : Etudiants des ING2-MI

Créé le : 02/11/2014

- La probabilité qu'il y ait deux arrivées dans un intervalle de temps  $[t, t+h]$  est équivalent de  $\lambda \cdot h$  au voisinage de 0.
  - La probabilité qu'il y ait plus d'une arrivée dans un intervalle de temps  $[t, t+h]$  est négligeable par rapport à  $h$  au voisinage de 0.
1. Dédurre en fonction de  $h$ , les expressions  $P(N_{t+h} - N_t = n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  2. Trouver un système d'équations différentielles pour exprimer  $p_n(t) = P(N_t = n)$ .
  3. Dans la mesure du possible, comparer le comportement de ce processus de comptage à un processus de Poisson avec le même paramètre  $\lambda$ .

### Etude de propriétés sur des chaînes de Markov

On considère la chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante :

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

1. Trouver les classes et leurs propriétés
2. Est-elle ergodique ?

On considère la chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante :

0,5	0,5	0	0
0,5	0,5	0	0
0	0	0,5	0,5
0	0	0,5	0,5

1. Trouver les classes et leurs propriétés
2. Est-elle ergodique ?

Rédigé par : Hervé de Milleville

Ref : *ING2-MI-SIM-PRO-STO-EXAMEN*

A l'intention de : Etudiants des ING2-MI

Créé le : 02/11/2014

On considère la chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante :

0,5	0,5	0	0
0,5	0,5	0	0
0	0	0,5	0,5
0	0	0	1

1. Trouver les classes et leurs propriétés.
2. Est-elle ergodique ?

On considère la chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante :

0,5	0,5	0	0
0	0,25	0,50	0,25
0	0	0,5	0,5
0	0	0	1

1. Trouver les classes et leurs propriétés.
2. Montrer qu'elle est ergodique de deux façons différentes.