EISTI Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information	**ING 1-GI : EXAMEN DE PROCESSUS STOCHASTIQUE DISCRET**

Rédigé par : Hervé de Milleville	Ref : *ING1-GI-PRO-STO-DIS-EXAMEN*
A l'intention de : Etudiants des ING1-GI	Créé le : 09/01/2014

Préambule

Cet examen dure 2h00. L'examen se fait sur feuilles. Les documents papiers sont autorisés. L'ordinateur est interdit. On vous demande de mentionner dans votre copie le libellé de votre groupe.

1) Questions de réflexion (4 pts)

1) $(X_n)_{n\in N}$ et $(Y_n)_{n\in N}$ sont deux chaînes de Markov dont les états sont à valeurs dans R ensemble des nombres réels. Le processus $(Z_n)_{n\in N} = (X_n + Y_n)_{n\in N}$ est-il une chaîne de Markov ? (on justifie sa réponse) (1 pt)
Corrigé : La probabilité de l'état de X_n à l'instant n sachant son état aux instants précédent ne dépend que de l'instant n-1 et de même pour l'état de Y_n à l'instant n. Alors toute fonction de X_n et Y_n vérifiera la même propriété et en particulier pour la fonction somme.
2) Soit $(X_n)_{n\in N}$ une chaîne de Markov dont les états sont à valeurs dans R ensemble des nombres réels. Le processus $(Z_n)_{n\in N^*} = (X_n + X_{n-1})_{n\in N^*}$ est-il une chaîne de Markov ? (on justifie sa réponse) (1 pt)
Corrigé : Contrairement à la question précédente, on ne pas affirmer que $(Z_n)_{n\in N^*}$ est une chaine de Markov car la probabilité de Z_n à l'instant n sachant son état aux instants précédents nécessite la connaissance de X_n à l'instant n-2 à cause de la présence de X_{n-1} dans la définition de $(Z_n)_{n\in N^*}$.
3) On considère $(X_n)_{n\in N}$ une chaîne de Markov. Dans cette chaîne de Markov, on suppose qu'il y deux états différents e_1 et e_2 qui vérifient la propriété suivante : $P(X_n = e_2 / X_{n-1} = e_1) = 1$.
   a. Pourquoi cela a un sens de fusionner ces deux états en un seul état ? (0,5 pt)
   Corrigé : Dès que la chaîne arrive dans l'état e_1, elle passe obligatoirement dans l'état e_2 à l'instant suivant. Il n'y a donc pas d'aléa dans ce changement d'état. Arriver en e_1 à l'étape n est équivalent à arriver en e_2 à l'instant n+1.
   b. Si on fusionne ces deux états en un seul état, qu'est-ce qui change dans la matrice de transition ? (0,5 pt)
   Corrigé : On supprime la ligne et la colonne correspondant à l'état e_2. Sin on note P l'ancienne matrice de transition et P' la nouvelle alors : $p'_{i,1} = p_{i,1} + p_{i,2}$
   c. On note e_3 un troisième état différent de e_1 et e_2. Si on fusionne les deux états e_1 et e_2 en un seul état, que deviennent les propriétés de e_3 (récurrent, transitoire, absorbant, apériodique). (0,5 pt)
   Corrigé : Cela dépend s'il y a une transition pour passer de l'état e_2 à l'état e_1.
   d. On note e_3 un troisième état différent de e_1 et e_2. Si on fusionne les deux états e_1 et e_2 en un seul état, que devient $n_{3,2}$ le délai moyen d'atteinte de l'état e_2 en partant de l'état e_3 ? (0,5 pt)
   Corrigé : le nouveau délai moyen est diminué car si on peut passer de l'état 3 à l'état 1 alors on a supprimé une étape pour arriver à e_2. De plus, si en partant de l'état e_3, on est obligé de passer par l'état e_1 pour arriver à e_2 alors le nouveau délai moyen est exactement diminué de 1.

2) *Un peu* de bon sens (1 pt)

1) Compléter la matrice de transition ci-dessous : (0,5 pt)

0,35	???	0,2	0,1
0,25	0,25	???	0,25
0	0	???	0,45
0,3	0,4	0,1	0,2

Corrigé

0,35	***0,35***	*0,2*	*0,1*
0,25	*0,25*	***0,25***	*0,25*
0	*0*	***0,55***	*0,45*
0,3	*0,4*	*0,1*	*0,2*

2) Pourquoi la matrice ci-dessous ne peut pas être une matrice de transition ? (0,5 pt)

0,4	0,3	0,2	0,1
0,8	0,1	0,1	0
0,25	0,35	0 ,1	0,4
0	0	0,55	0,45

Corrigé : Dans une matrice de transition, la somme des valeurs de chaque ligne est égale à 1. Ce n'est pas le cas pour la 3ème ligne dont la somme vaut 1,1.

3) Classes et ergodicité (4,5 pts)

On considère la matrice de transition suivante :

0,8	0,2	0	0	0	0
0,7	0,3	0	0	0	0
0	0,35	0 ,35	0,3	0	0
0	0	0,45	0,45	0,05	0,05
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0

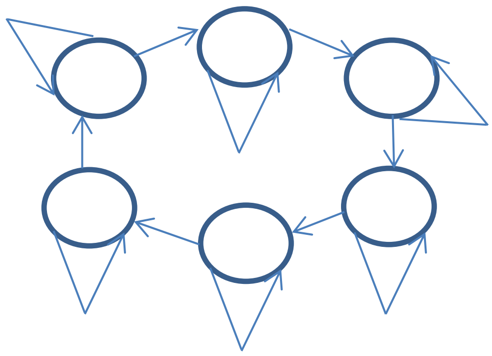
1) Trouver les classes de cette chaîne de Markov sur la base du graphe de transition. (0,5 pt)
   Corrigé : Les classes sont : {1,2}, {3,4} et {5,6}.
2) Trouver les propriétés de chaque classe (récurrente, transitoire, absorbante, apériodique). (0,5 pt)
   Corrigé : Quand la chaîne est dans l'une classes {1,2} ou {5,6}, elle y reste. Ces classes sont donc récurrentes. En revanche, quand la chaîne est dans la classe {3,4} on peut en sortir sans jamais y revenir. Elle est donc transitoire. Enfin, à l'intérieur de chacune de ces classes, il y a des chemins de longueur 1. Elles sont donc apériodiques.
3) Est-elle ergodique ? (on justifie la réponse) (0,5 pt)
   Corrigé : Une chaîne de Markov contenant plus d'une classe récurrente ne peut pas être ergodique.

ING 1-GI : EXAMEN DE PROCESSUS STOCHASTIQUE DISCRET

On considère la matrice de transition suivante :

0,8	0,2	0	0	0	0
0	0,8	0,2	0	0	0
0	0	0,8	0,2	0	0
0	0	0	0,8	0,2	0
0	0	0	0	0,8	0,2
0,2	0	0	0	0	0,8

1) Trouver les classes de cette chaîne de Markov sur la base du graphe de transition. (0,5 pt)
   Corrigé
   Comme l'indique le graphe de transition ci-dessus, il n'y a qu'une seule classe {1, 2, 3, 4, 5, 6}.



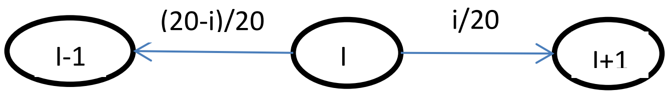
2) vTrouver les propriétés de chaque classe (récurrente, transitoire, absorbante, apériodique). (0,5 pt)
   Corrigé : Cette unique classe est récurrente. De plus, il y a des chemins de longueur 1, elle est donc apériodique.
3) Est-elle ergodique ? (on justifie la réponse) (0,5 pt)
   Corrigé : Une chaîne de Markov formée d'une seule classe récurrente et apériodique est ergodique.
4) Si pour la dernière ligne, on remplace la valeur 0,2 par 0
   a. Par quelle valeur faut-il remplacer la valeur 0,8 de la dernière ligne pour que la matrice reste une matrice de transition ? (0,5 pt)
      Corrigé : la somme des éléments de chaque ligne doit être égale à 1, il faut remplacer 0,8 par la valeur 1.
   b. Reprendre les questions 1) et 2) avec ces nouvelles valeurs. (0,5 pt)
      Corrigé : On obtient maintenant 6 classes : {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6}. Les 5 premières sont transitoires et la dernière est absorbante.
   c. Avec ces nouvelles valeurs, montrer de deux façons différentes que la chaîne est ergodique. (0,5 pt)
      Corrigé
      1) *Elle est ergodique car il y a une seule classe récurrente et cette classe est apériodique.*
      2) *La matrice de transition est une matrice diagonale supérieure. Les valeurs propres sont donc les valeurs des éléments de la diagonale principale. Dans cette diagonale, 1 est valeur propre simple et toutes les autres ont des valeurs strictement inférieures à 1. Elle est donc ergodique.*

4) Un petit problème (10,5 pts)

On considère le jeu à deux joueurs suivant :

- On dispose de 20 jetons que l'on répartit au hasard entre les deux joueurs.
- Une partie est un ensemble de coups.
- A chaque coup du jeu, les deux joueurs misent 1 jeton et le joueur qui gagne le coup récupère les 2 jetons.
- A chaque coup, chaque joueur a une probabilité proportionnelle à son nombre de jetons de gagner.
- La partie se termine quand l'un des joueurs n'a plus de jeton.

1) Montrer que ce problème peut se modéliser à l'aide d'une chaîne de Markov. (1 pt)
   Corrigé : On note X_n *le nombre de jetons possédés par le premier joueur à l'instant n. Il est clair que* X_n *ne dépend que de* X_n *et du résultat du n*^{ième} *coup. Le processus* $(X_n)_{n\in N}$ *est donc une chaîne de Markov.*
2) Etablir le graphe de transition. (0,5 pt)
   Corrigé : L'ensemble des états de cette chaîne de Markov est {0, 1, 2, …, 20}. Les états 0 et 20 sont des états absorbants. Pour chaque valeur i $\in$*[1,19], on a les transitions suivantes :*



3) Etablir la matrice de transition. (0,5 pt)
   Corrigé : Les états 0 et 20 sont absorbants car la partie est respectivement perdue ou gagnée par le premier joueur. On a donc $p_{0,0} = p_{20,20} = 1$.
   Pour les autres transitions, il est dit que la probabilité du joueur de gagner un coup est proportionnelle à son nombre de jetons : $\forall i \in \{1,\ldots,19\}$ $p_{i,i+1} = i/20$ et $p_{i-1,i} = (20-i)/20$
4) Trouver les classes et leurs propriétés. (0,5 pt)
   Corrigé : On a donc trivialement 3 classes : {0}, {1, …, 19} et {20}. Les classes {0} et {20} sont absorbantes. La classe {1, …, 19} est transitoire et elle n'est pas apériodique car les chemins partant d'un état et revenant à cet état sont de longueur pair donc le pgcd est au moins égal à 2.
5) Est-elle ergodique ? (0,5 pt)
   Corrigé : Elle n'est pas ergodique car elle contient plus d'une classe récurrente (dans notre cas absorbante)
6) Si le premier joueur démarre avec 5 jetons, quelle est la probabilité qu'il perde le jeu au bout de 5 coups ? (0,5 pt).
   Corrigé : La seule possibilité est qu'il perde à chaque fois. Cette probabilité est égale à (15/20)(16/20)*(17/20)*(18/20)*(19/20).*

7) Ecrire le code (pseudo-code ou en C) qui permet de simuler une partie entière : de l'affectation des jetons jusqu'à la fin de la partie. On doit savoir à la fin de la partie qui a gagné et en combien de coups. (6 pts)

Corrigé :

```
fonction affecterJetonsJoueur() : Entier
        nbJetons : Entier
Début
        // la fonction alea() est une réalisation d'une variable uniforme sur [0,1]
        // la valeur 1 n'est jamais prise
        nbJetons ← alea() * 21 // On suppose que l'affectation d'un réel dans un entier donne la partie
        entière
        retourner nbJetons
Fin affecterJetonsJoueur

// On définit la structure pour le résultat de la partie
Partie = structure
        gagne : Booleen
        nbCoups  Entier
Fin Partie

// On écrit le pseudo code pour simuler une partie
Fonction simulerPartie() : Partie
        nbCoups : Entier
        nbJetons : Entier
        res : Partie
Début
        nbJetons ← affecterJetonsJoueur()
        nbCoups ← 0
        Tantque nbJetons >= 1 et nbJetons <= 19
                u ← alea()
                nbCoups ← nbCoups +1
                Si u < (nbJetons / 20) Alors // division réelle
                        nbJetons ← nbJetons + 1
                Sinon
                        nbJetons ← nbJetons – 1
                Fin Si
        Fin Tantque
        res.nbCoups ← nbCoups
        Si nbJetons = 20 Alors
                res.gagne ← vrai
        Sinon
                res.gagne ← faux
        Fin Si
        retourner res
Fin simulerPartie
```