Corrigé TD 1 - Proba

EX 1 $A = \{$des nombres à 6 chiffres ne comprenant aucun 0$\}$.

1°) un élément de A est une 6-liste d'éléments de $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\text{card } E = 9$ donc $\text{card } A = 9^6$

2°) $A_1 = \{$des nombres de A ayant 6 chiffres différents$\}$.

un élément de A_1 est un arrangement de 6 éléments de E

donc $\text{card } A_1 = A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 9$.

3°) $A_2 = \{$des nombres pairs de A$\}$.

un élément de A est pair ssi, son chiffre des unités est 2, 4, 6 ou 8. Il y a 4 façons de choisir un tel chiffre, puis, pour chacune d'elles, 9^5 façons de choisir la 5-liste des 5 premiers chiffres. Donc $\text{card } A_2 = 4 \times 9^5$.

4°) $A_3 = \{$des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante$\}$.

Il y a $\binom{9}{6}$ façons de choisir les 6 chiffres d'un nombre de A_3 (car les 6 chiffres sont différents et on les considère sans ordre).

puis, pour chacune d'elles, une façon de les écrire dans l'ordre croissant donc $\text{card } A_3 = \binom{9}{6}$.

EX 2 on tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

a) un tirage est une combinaison de 5 cartes parmi 32, il y a donc $n = \binom{32}{5} = 201376$

b) on note n_i le nombre de tirages correspondant à la $i^{\text{ème}}$ question

1°) n_1 = nombre de tirage contenant 5 carreaux + nombre de tirage contenant 5 coeurs.

. un tirage contenant 5 carreaux est une combinaison de 5 cartes prises parmi les 8 carreaux ; il y a donc $\binom{8}{5}$ tirages contenant 5 carreaux. On a le même résultat pour 5 coeurs.

ainsi $n_1 = 2\binom{8}{5} = 112$.

2°) Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir une combinaison de 2 coeurs parmi 8 puis, pour chacune d'elles, $\binom{8}{3}$ façons de choisir une combinaison de 3 piques parmi 8, donc $n_2 = \binom{8}{2}\binom{8}{3} = 1568$.

3°) 1ère méthode $n_3 = \sum_{k=1}^{4} n_k$ où n_k désigne le nombre de tirages contenant exactement k rois. Il y a $\binom{4}{k}$ façons de choisir une combinaison de k rois parmi 4 puis, pour chacune d'elles $\binom{32-4}{5-k}$ combinaisons de $(5-k)$ cartes prises parmi les $(32-4)$ cartes qui ne sont pas des rois, d'où $n_k = \binom{4}{k}\binom{28}{5-k}$

et donc $n_3 = \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k}\binom{28}{5-k} = 103\,096$.

2ème méthode n_3 = nombre de tirages quelconques - nombre de tirage sans roi. un tirage sans roi est une combinaison de 5 cartes prises parmi les $(32-4)$ cartes qui ne sont pas des rois,

d'où $n_3 = \binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$.

4°) $n_4 = \sum_{k=0}^{1} n_k = \sum_{k=0}^{1} \binom{4}{k}\binom{28}{5-k} = \binom{28}{5} + 4\binom{28}{4} = 180\,180$.

EX3 on jette 2 fois le dé, on obtient un couple $(i,j) \in$
1°) $\{1,2,3,4,5,6\}^2$. Le Tableau suivant contient pour tous les couples (i,j) le total $T = i+j$.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

d'après le tableau on obtient :

a) $T = 6$ de 5 façons.

b) $T = 7$ de 6 façons.

c) T divisible par 3 de 12 façons.

2°) on jette 3 fois le dé. On obtient un triplet $(i,j,k) \in \{1,2,3,4,5,6\}^3$ soit $T' = i+j+k$.

a) on a $16 = 6+6+4$ ou $6+5+5$

les triplets pour lesquels $T' = 16$ sont :
$(6,6,4)$, $(6,4,6)$; $(4,6,6)$; $(6,5,5)$, $(5,6,5)$, $(5,5,6)$
d'où 6 façons d'obtenir $T' = 16$.

b) on a $15 = 6+6+3$ ou $6+5+4$ ou $5+5+5$

les triplets pour lesquels $T' = 15$ sont $(6,6,3)$, $(6,3,6)$, $(3,6,6)$; ~~$(6,5,4)$~~ ~~$(6,4,5)$~~ les $3!$ triplets obtenus par permutations des nombres 4, 5 et 6 et $(5,5,5)$ d'où 10 façons d'obtenir $T' = 15$

c) $T' \geq 15$ ssi $T' = 15$ ou $T' = 16$ ou $T' = 17$ ou $T' = 18$

les triplets pour lesquels $T' = 17$ sont $(6,6,5)$, $(6,5,6)$ et $(5,6,6)$
car $17 = 6+6+5$.

le seul triplet qui donne $T' = 18$ est $(6,6,6)$

d'où $T' \geq 15$ est obtenu de 20 façons.

R9

k \ $i+j$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

EX4 on tire 2 boules. on obtient 2 éléments de $E = [\![1,9]\!]$

soit A l'événement "les 2 ~~boules~~ nombres obtenus sont de même parité"!!

1.) on tire les 2 boules simultanément.

à chaque tirage on associe une combinaison de 2 éléments de E.

Toutes ces combinaisons sont équiprobables, donc :

$P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$; il y a $\binom{9}{2} = 36$ cas possibles

il y a $\binom{5}{2}$ combinaisons de 2 nombres impairs de E et

$\binom{4}{2}$ combinaisons de 2 nombres pairs de E donc

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

2.) on tire une boule, on ne la remet pas, on tire une $2^{\text{ème}}$ boule.

A chaque tirage on associe un arrangement de 2 éléments de E.

tous les arrangements sont équiprobables, donc

$P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$, il y a A_9^2 cas possibles

il y a A_5^2 arrangements de 2 nombres impairs de E et

A_4^2 arrangements de 2 nombres pairs de E.

donc $P(A) = \dfrac{A_5^2 + A_4^2}{A_9^2} = \dfrac{32}{72} = \dfrac{4}{9}$

Rq cet exemple confirme le fait intuitif qu'il équivalent d'effectuer des tirages simultanés ou des tirages successifs sans remise.

3.) on tire une boule et on la remet avant de tirer la 2eme boule. A chaque tirage on associe un couple de 2 éléments de E. Tous ces couples sont équiprobables ; il y a 9^2 cas possibles, il y a 5^2 couples de nombres impairs de E et 4^2 couples de nombres pairs de E. Donc $P(A) = \dfrac{5^2+4^2}{9^2} = \dfrac{41}{81}$

EX5 notons N_k (resp. R_k) l'événement : "le k^e tirage donne une boule noire (resp. rouge)."
les tirages sont faits avec remise donc les N_k et R_k sont indépendants
soit $\bar{A}_n$ l'evenement : "les tirages donnent des bouls de la même couleur"
d'où $\bar{A}_n = (N_1 \cap .. \cap N_n) \cup (R_1 \cap .. \cap R_n)$ d'où

$P(\bar{A}_n) = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow P(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

. $B_n = (R_1 \cap .. \cap R_n) \cup (N_1 \cap R_2 \cap .. \cap R_n) \cup ... \cup (R_1 \cap .. \cap R_{n-1} \cap N_n)$

d'où $P(B_n) = (\frac{1}{2})^n + \sum_{k=1}^{n} P(R_1 \cap .. \cap N_k \cap R_{k+1} \cap .. \cap R_n)$

$= (\frac{1}{2})^n + n \cdot (\frac{1}{2})^n = \dfrac{n+1}{2^n}$

2.) d'aprés 1.) $P(A_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $P(B_2) = \frac{3}{4}$
$A_2 \cap B_2$ est réalisé si l'on obtient une boule noire et une boule rouge lors des 2 tirages donc $A_2 \cap B_2 = (R_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap R_2)$
et donc $P(A_2 \cap B_2) = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2}$

comme $P(A_2)\,P(B_2) = \frac{3}{8} \neq P(A_2 \cap B_2)$ alors A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.

3.) $P(A_3) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $P(B_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

$A_3 \cap B_3 = (R_1 \cap R_2 \cap N_3) \cup (R_1 \cap N_2 \cap R_3) \cup (N_1 \cap R_2 \cap R_3)$

d'où $P(A_3 \cap B_3) = 3 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$ ou a $P(A_3 \cap B_3) = P(A_3)\,P(B_3)$

donc A_3 et B_3 sont indépendants.

EX6 toutes les combinaisons de 4 chaussures parmi les 20 sont équiprobables, il y a donc pour tout événement A, on a :

$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ et il y a $\binom{20}{4}$ cas possibles.

1.) soit A_1 l'événement : "tirer 2 paires complètes" ; il y a $\binom{10}{2}$ façons de choisir 2 paires de chaussures parmi les 10 paires, d'où $P(A_1) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323} \simeq 0{,}009$.

2.) soit A_2 l'événement : "tirer au moins une paire" ; $\overline{A_2}$ est l'événement "tirer 4 chaussures provenant de 4 paires différents" ; il y a $\binom{10}{4}$ façons de choisir 4 paires de chaussures parmi 10, puis pour chacun d'elles, 2^4 façons de choisir une chaussure de chaque paire, d'où $P(\overline{A_2}) = \frac{\binom{10}{4}2^4}{\binom{20}{4}}$ et $P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = \frac{99}{323} \simeq 0{,}307$

3.) soit A_3 l'événement : "tirer une paire et une seule" — on choisit les paires de chaussures puis on choisit une chaussure de chaque paire.

$A_3 = A_2 - A_1 \Rightarrow P(A_3) = P(A_2) - P(A_1)$ car $A_1 \subset A_2$

$= \frac{96}{323} \simeq 0{,}297$.

Rq on peut aussi calculer directement $P(A_3)$, en effet : il y a 10 façons de choisir une paire complète de chaussure, puis pour chacune d'elles $\binom{9}{2}$ façons de choisir 2 paires de chaussures distinctes de la première et 2^2 façons de choisir une chaussure de ces 2 paires.

d'où $P(A_3) = \frac{10 \times \binom{9}{2} \times 2^2}{\binom{20}{4}} = \frac{96}{323}$.