

# Variabes aléatoires réelles continues

Khalid EL AMINE I.  
Department of Mathematics



Dans tout ce chapitre :

- $\Omega$  est un univers.
- $(\Omega, \mathcal{A})$  est un espace probabilisable.
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un espace probabilisé.
- $\mathbb{R}$  sera toujours muni de la tribu de BOREL,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
- Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans l'espace probabilisable  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .
- On considère les variables aléatoires réelles  $X$  telles que  $X(\Omega)$  est non dénombrable.

## 1 Variable aléatoire réelle

**Définition 1.1** (Variable aléatoire réelle)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable.

On appelle *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé) sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute fonction

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$X(\Omega)$  est appelé *univers image de  $\Omega$  par  $X$* .

**Proposition 1.2** Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable et  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

$X$  est une v.a.r. sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , si et seulement si,  $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Preuve :**

**Notations :** Pour alléger les notations, on écrira :

- $\{X \in B\}$  pour l'ensemble  $X^{-1}(B)$  où  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , i.e. :

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

$\{X \in B\}$  se note aussi  $[X \in B]$  ou  $(X \in B)$ .

De même :

- $\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ , où  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$
- $\{X < x\} = X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$
- $\{a < X \leq b\} = X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$
- etc.

**Définition 1.3** (Fonction de répartition d'une v.a.r.)

Soit  $X$  une v.a.r.. La fonction

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_X(x) = P(\{X \leq x\}) \end{aligned}$$

est appelé *fonction de répartition de  $X$*  (f.r. en abrégé).

**Remarque :**  $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0, 1]$ .

$F_X(x)$  représente la probabilité de toutes les réalisations inférieures ou égales au réel  $x$ .

**Proposition 1.4** Soit  $X$  une v.a.r. et  $F_X$  sa f.r.. Alors :

- 1)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- 3)  $F_X$  est continue à droite sur  $\mathbb{R}$  et admet une limite à gauche sur  $\mathbb{R}$  (c.a.d.l.a.g. en abrégé).

**Preuve :**

**Proposition 1.5** Soit  $X$  une v.a.r. et  $F_X$  sa f.r.. Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Alors :

- 1)  $P(\{X \leq a\}) = F_X(a)$
- 2)  $P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$
- 3)  $P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
- 4)  $P(\{X = x\}) = F_X(x^+) - F_X(x^-)$

**Preuve:**

## 2 Variable aléatoire réelle continue

**Définition 2.1** (v.a.r. continue)

Une v.a.r.  $X$  est dite *continue* si sa f.r.  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.2** Soit  $X$  une v.a.r.. Alors

$$X \text{ est continue, si et seulement si, } P(\{X = x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

**Preuve :**

**Remarque :** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .  $P(\{X = a\}) = 0$  n'implique pas que l'événement  $\{X = a\}$  est impossible. Si c'était le cas, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'événement  $\{X = x\}$  serait impossible et  $X$  ne pourrait prendre aucune valeur.

**Proposition 2.3** Soit  $X$  une v.a.r. continue. Alors,  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$B \text{ est dénombrable} \implies P(\{X \in B\}) = 0$$

**Preuve :**

**Exercice :** Supposons que  $X$  soit une v.a.r. continue.

- 1) Que vaut  $P(\{X \in \mathbb{Q}\})$  ?
- 2) Que vaut  $P(\{X \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\})$  ?

**Solution :**

**Proposition 2.4** Soit  $X$  une v.a.r. continue de f.r.  $F_X$ . Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  :

- $P(\{X < a\}) = P(\{X \leq a\}) = F_X(a)$
- $P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$
- $P(\{a < X < b\}) = P(\{a \leq X < b\}) = P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$

**Preuve :** Par application de de l'égalité  $P(\{X = x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  et la définition d'une f.r. d'une v.a.r..

### 3 Variable aléatoire réelle absolument continue

#### 3.1 Fonction de densité de probabilité

**Définition 3.1** (Fonction de densité de probabilité)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

On dit que  $f$  est une *fonction de densité de probabilité* (f.d.p. en abrégé) sur  $\mathbb{R}$  si :

- (1)  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (2)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf sur une partie dénombrable.
- (3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = |x|\mathbf{1}_{[-1,1]}$$

Vérifier que  $f$  est une fonction de densité de probabilité.

**Solution :**

**Remarque :** Soit  $f$  une fonction de densité de probabilité.

- $f$  peut ne pas être bornée.
- ( $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ )  $\nRightarrow$  ( $f \leq 1$  sur  $\mathbb{R}$ ) ; contrairement à la fonction de masse de probabilité.  $f(x)$  ne correspond pas à une valeur de probabilité.

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est une fonction de densité de probabilité.

**Solution :**

### 3.2 Variable aléatoire réelle absolument continue

**Définition 3.2** (v.a.r. absolument continue)

Une v.a.r.  $X$  est dite *absolument continue* (ou de loi absolument continue), s'il existe une f.d.p. noté  $f_X$ , telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P(\{X \in B\}) = \int_B f_X(x) dx$$

- $f_X$  est alors appelée *fonction de densité de probabilité de  $X$* .
- $S_X = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) \neq 0\}$  est appelé *support de la loi de  $X$* .

**Rappel :** La loi de probabilité d'une v.a.r.  $X$ , noté  $P_X$ , est une probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Elle est défini par

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad P_X(B) = P(\{X \in B\})$$

**Remarque :** Il n'y a pas d'unicité de la f.d.p. pour une v.a.r.  $X$ .

Si  $f_X$  est une f.d.p. de  $X$ , alors n'importe quelle f.d.p.  $f$  égale à  $f_X$  sauf (par exemple) sur un ensemble fini de points est aussi une f.d.p. de  $X$ . Par exemple

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{[0,1]} ; \quad f_2(x) = \mathbf{1}_{]0,1]} ; \quad f_3(x) = \mathbf{1}_{]0,1[} ; \quad f_4(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}$$

sont des f.d.p. de la même v.a.r..

**Exemple:** Si  $X$  est une v.a.r. absolument continue de f.d.p.  $f_X$ , alors :

$$P(\{X \in [1, 3]\}) = \int_{[1,3]} f_X(x) dx = \int_1^3 f_X(x) dx$$

On rappelle que  $\{X \in [1, 3]\}$  se note  $\{1 \leq X \leq 3\}$ .

**Proposition 3.3** Soit  $X$  une v.a.r..

*Si  $X$  est absolument continue, alors  $X$  est continue*

**Preuve :**  $\forall a \in \mathbb{R}$

$$P(\{X = a\}) = P(\{X \in \{a\}\}) = \int_{\{a\}} f_X(x) dx = \int_a^a f_X(a) dx = f_X(a) \int_a^a 1 dx = f_X(a) \times 0 = 0$$

### 3.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue

**Théorème 3.4** Soit  $X$  une v.a.r. absolument continue, de f.d.p.  $f_X$ . La f.r. de  $X$ , notée  $F_X$  est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Preuve :** Vient de la formule de la loi d'une v.a.r. absolument continue.

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = P(\{X \in ]-\infty, x]\}) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

**Graphe de  $F_X$ :**

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = c(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ , où  $c \in \mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer la constante  $c$  pour que  $f$  soit une f.d.p.. Tracer la courbe de  $f$ .
- 2) Supposons que  $X$  soit une v.a.r. absolument continue ayant  $f$  pour f.d.p.. Déterminer  $F_X$ , la f.r. de  $X$  et dessiner sa courbe.

**Solution :**

**Proposition 3.5** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. absolument continues sur le même  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Alors :

$F_X = F_Y$  si et seulement si  $P_X = P_Y$

**Preuve :**

**Remarque :** La fonction de répartition d'une v.a.r. absolument continue caractérise complètement sa loi.

**Proposition 3.6** Soit  $X$  une v.a.r. absolument continue de f.d.p.  $f_X$ . Notons  $F_X$  sa f.r.. Alors :

- 1)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- 3)  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 4)  $F_X$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , sauf sur une partie dénombrable.
- 5) Si  $f_X$  est continue en  $x_0$ , alors  $F_X$  est dérivable en ce point et

$$F'_X(x_0) = f_X(x_0)$$

**Preuve :**

**Remarque :**  $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0, 1]$ .

La réciproque proposition ci-dessus est donnée par le

**Théorème 3.7** Soit  $X$  une v.a.r. de f.r.  $F_X$ .

Si  $F_X$  vérifie :

- (1)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

(3)  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

(4)  $F_X$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , sauf en un nombre dénombrable de points.

Alors

1)  $X$  est une v.a.r. absolument continue.

2) Si  $f$  est une fonction telle que  $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f(x_0) = F'_X(x_0)$  en tout point  $x_0$  où  $F_X$  est dérivable, alors  $f$  est une f.d.p. de  $X$ .

**Preuve :**

**Remarque Importante :** Si  $X$  est une v.a.r. absolument continue de f.r.  $F_X$ , alors  $F_X$  est dérivable presque partout (théorème de différentiation de LEBESGUE). Ceci permet d'associer à  $X$  une f.d.p.  $f_X$  de façon canonique ; on prendra

$$f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{en tout point } x \text{ où } F_X \text{ est dérivable} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**Exemple :** Soit  $X$  une v.a.r. dont la f.r.  $F_X$  est défini par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq x \end{cases}$$

Montrer que  $X$  est absolument continue et proposer une p.d.f. de  $X$ .

**Solution :**

**Proposition 3.8** Soit  $X$  une v.a.r. absolument continue de f.d.p.  $f_X$  et de f.r.  $F_X$ .

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  :

- $P(\{X < a\}) = P(\{X \leq a\}) = F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$
- $P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a) = \int_a^{+\infty} f_X(t) dt$
- $P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt$
- $P(\{a < X < b\}) = P(\{a \leq X < b\}) = P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{a < X \leq b\})$

**Preuve :** Par application de de l'égalité  $P(\{X = x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  ; de la définition d'une f.r. d'une v.a.r. et de la définition de la loi d'une v.a.r. absolument continue.

Représentations graphique de  $P(\{X < a\})$ ,  $P(\{X \geq a\})$  et  $P(\{a < X < b\})$  :

**Discussion** Existence de v.a.r. continue mais non absolument continue.

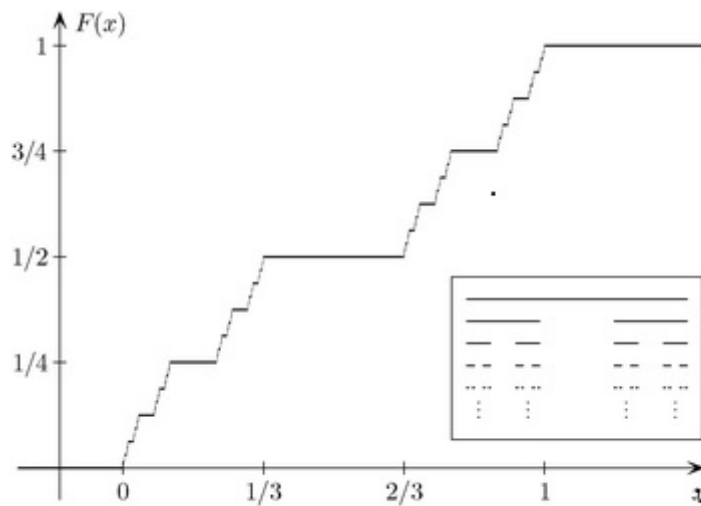


Figure 1: Fonction de CANTOR

Dans tous les cas raisonnables, une v.a.r. continue aura une f.d.p. ; c'est-à-dire qu'elle sera absolument continue. Toutefois, il est possible d'établir l'existence de v.a.r.s qui sont continues mais pas absolument continues. Un exemple remarquable est la loi de CANTOR. La f.r.  $F$  de la loi de CANTOR est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable (de dérivée nulle) presque partout, mais elle n'est pas absolument continue.

La loi de CANTOR est une loi de probabilité singulière dont le support est l'ensemble de Cantor. Sa f.r. est représentée par l'escalier de CANTOR, aussi appelé escalier du diable (voir figure 1).

La loi de Cantor a les propriétés suivantes :

- Elle n'est pas absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), car elle n'admet pas de fonction de densité de probabilité.
- Elle n'est pas discrète, car elle n'admet pas de fonction de masse de probabilité.
- Elle n'est pas non plus une loi mixte (des deux lois citées ci-dessus).
- Son support est non dénombrable et de mesure de LEBESGUE nulle.

## 4 Moments d'une variable aléatoire réelle absolument continue

On abrégera souvent variable aléatoire réelle absolument continue en v.a.r.a.c..

### 4.1 Espérance

**Définition 4.1** (Espérance)

Soit  $X$  une v.a.r.a.c. de f.d.p.  $f_X$ . On dit que  $X$  admet une espérance si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_X(x)dx < +\infty$$

Dans ce cas, l'espérance de  $X$  est notée  $E(X)$  et elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$$

### 4.2 Propriétés de l'espérance

**Théorème 4.2** (Théorème de transfert)

Soit  $X$  une v.a.r.a.c. de f.d.p.  $f_X$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux ( $g$  mesurable suffit). Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale, l'espérance de la v.a.r.  $g(X)$  vaut :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$

**Preuve :**

**Théorème 4.3** (Linéarité de l'espérance)

Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r.a.c.s. sur le même  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , admettant des espérances. Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, la v.a.r.  $aX + bY$  admet une espérance et :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

En particulier

$$E(aX) = aE(X) \quad ; \quad E(a) = a$$

et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad ; \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

**Preuve :**

**Proposition 4.4** (Croissance de l'espérance)

Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.r.a.c.s. sur le même  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , admettant des espérances. Alors :

$$Y \leq X \quad \implies \quad E(Y) \leq E(X)$$

En particulier :

$$0 \leq X \quad \implies \quad 0 \leq E(X)$$

et pour  $a, b \in \mathbb{R}$  :

$$a \leq X \leq b \quad \implies \quad a \leq E(X) \leq b$$

**Preuve :**

### 4.3 Variance & Ecart-type

**Définition 4.5** (Variance & Ecart-type)

Soit  $X$  une v.a.r.a.c. de f.d.p.  $f_X$  et admettant une espérance  $E(X)$ .

- La *variance de  $X$*  est défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

sous réserve de convergence de l'intégrale.

- L'*écart-type de  $X$*  est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

sous réserve d'existence de  $V(X)$ .

**Remarque :**

- $V(X)$  est l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire  $X$  par rapport à sa valeur moyenne.
- $V(X)$  est donc un indicateur mesurant la dispersion des valeurs  $x$  de  $X$  autour de leurs moyenne pondérée  $E(X)$ . Plus précisément, c'est  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$  qui mesure l'étendue de cette dispersion.

**Définition 4.6** (v.a.r. centrée (resp. centrée réduite))

Soit  $X$  une v.a.r.a.c.. On dit que :

- $X$  est centrée, si elle admet une espérance nulle.
- $X$  est centrée réduite, si elle admet une espérance nulle et une variance égale à 1.

**Théorème 4.7** Soit  $X$  une v.a.r.a.c..

- Si  $X$  admet une espérance, alors  $X - E(X)$  est centrée.
- Si  $X$  admet une variance non nulle, alors  $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

**Preuve :**

### 4.4 Moments d'ordre supérieur

**Définition 4.8** (Moments)

Soit  $X$  une v.a.r.a.c. de f.d.p.  $f_X$ . Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale :

- Le *moment d'ordre  $m$  de  $X$*  est défini par

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x) dx$$

- Le *moment centré d'ordre  $m$  de  $X$*  est défini par

$$E((X - E(X))^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^m f_X(x) dx$$

**Proposition 4.9** Soit  $X$  une v.a.r.. Si  $X$  admet un moment d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  alors  $X$  admet des moments de tout ordre  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ .

**Preuve :**

**Théorème 4.10** (Formule de KÖENIG-HUYGHENS)

Soit  $X$  une v.a.r.. Si  $E(X^2)$  existe, alors  $V(X)$  existe et elle est donné par :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

**Preuve:**

**Proposition 4.11** Soit  $X$  une v.a.r. admettant une variance. Alors :

- $V(X) \geq 0$
- $V(aX + b) = a^2V(X), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Preuve :**

## 4.5 Indépendance de variables aléatoires réelles

**Définition 4.12** Toutes les v.a.rs ci-après sont définies sur le même  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- Deux v.a.r.  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes, si et seulement si,  $\forall (A, B) \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^2$ ,

les événements  $\{X \in A\}$  et  $\{Y \in B\}$  sont indépendants

i.e.

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\})$$

- Une suite de  $n$  v.a.r.  $(X_1, \dots, X_n)$  est dite indépendante, si et seulement si,  $\forall (B_1, \dots, B_n) \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^n$

la suite d'événement  $(\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\})$  est indépendante.

i.e.

$$P(\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) = P(\{X_1 \in B_1\}) \dots P(\{X_n \in B_n\})$$

**Théorème 4.13** Toutes les v.a.rs ci-après sont définies sur le même  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- Deux v.a.r.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

les événements  $\{X \leq x\}$  et  $\{Y \leq y\}$  sont indépendants

i.e.

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})P(\{Y \leq y\})$$

- Une suite de  $n$  v.a.r.  $(X_1, \dots, X_n)$  est indépendante, si et seulement si,  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

la suite d'événement  $(\{X_1 \leq x_1\}, \dots, \{X_n \leq x_n\})$  est indépendante.

En particulier

$$P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\}) = P(\{X_1 \leq x_1\}) \dots P(\{X_n \leq x_n\})$$

**Preuve :**

**Proposition 4.14** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a.rs admettant chacune un moment d'ordre 2.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

and

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

**Preuve :**

## 5 Lois continues usuelles

- Toutes les v.a.r.s absolument continues ci-après sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- v.a.r. absolument continue sera abrégée en v.a.r.a.c..

### 5.1 Loi continue uniforme

**Définition 5.1** Soit  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a < b$ . On dit qu'une v.a.r.a.c.  $X$  suit une *loi continue uniforme* sur  $[a, b]$  et on note

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

si  $X$  admet pour f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

**Exercice :** Soit  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ . Vérifier que  $f_X$  est une p.d.f..

**Solution :**

**Proposition 5.2** Si  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ , alors :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Preuve :**

**Proposition 5.3** Si  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ , alors sa f.r. est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

**Preuve :**

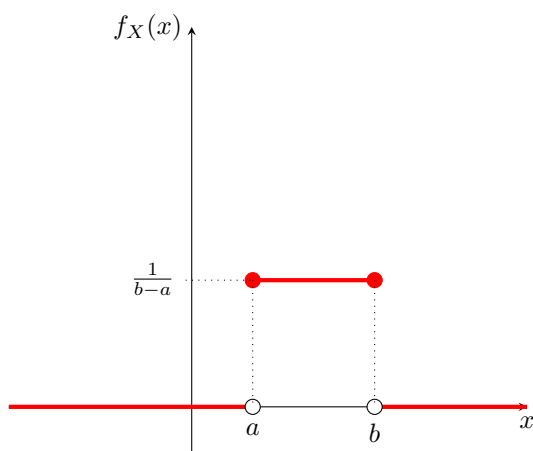


Figure 2: f.d.p. de  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

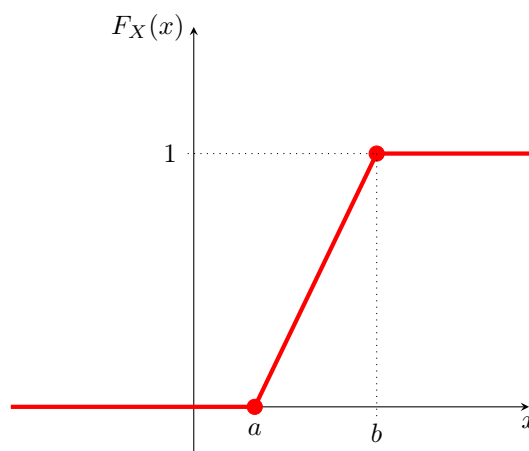


Figure 3: f.r. de  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

**Exercice :** Soit  $c \in \mathbb{R}^*$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer  $c$  pour que  $f$  soit une f.d.p..
- 2) Soit  $X$  une v.a.r.a.c. ayant  $f$  pour f.d.p..
  - a) Déterminer  $F_X$ , la f.r. de  $X$ .
  - b) Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

**Proposition 5.4** Soit  $X$  une v.a.r.a.c.. Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Alors :

$$X \sim \mathcal{U}([0, 1]) \iff a + (b - a)X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

et

$$X \sim \mathcal{U}([a, b]) \iff \frac{X - a}{b - a} X \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

**Preuve :**

## 5.2 Loi exponentielle

**Définition 5.5** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit qu'une v.a.r.a.c.  $X$  suit une *loi exponentielle* de paramètre  $\lambda$  et on note

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

si  $X$  admet pour f.d.p.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

**Exercice :** Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ . Vérifier que  $f_X$  est une p.d.f..

**Solution :**

**Proposition 5.6** Si  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , alors :

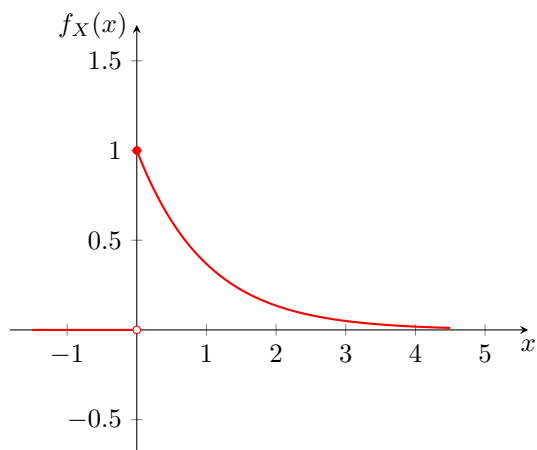
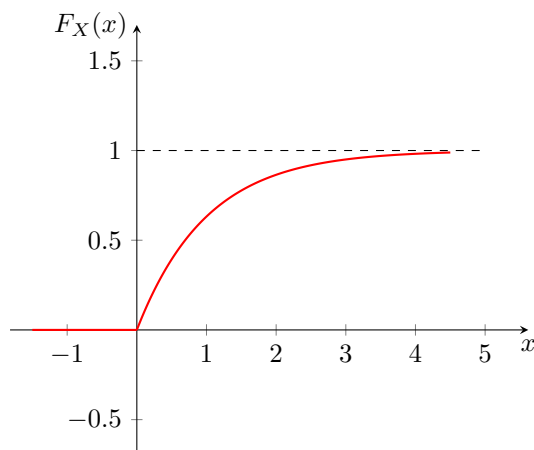
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{and} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Preuve :**

**Proposition 5.7** Si  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , alors sa f.r. est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

**Preuve :**

Figure 4: f.d.p. de  $X \sim \mathcal{E}(1)$ Figure 5: f.r. de  $X \sim \mathcal{E}(1)$ 

**Exercice** : La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif, représentée par  $X$ , est une v.a.r.a.c. ayant pour f.d.p. la fonction  $f_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-0.2t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$$

- 1) Déterminer la loi de  $X$  et donner sa f.r.  $F_X$ .
- 2) Représenter graphiquement  $f_X$  et  $F_X$ .
- 3) On prend  $t$  en seconde.
  - a) Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .
  - b) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieure à 4 secondes ?
  - c) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie comprise entre 1 et 3 secondes ?

**Solution** :

**Proposition 5.8** Soit  $X$  une v.a.r.a.c.. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . alors :

$$X \sim \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

et

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \iff \lambda X \sim \mathcal{E}(1)$$

**Preuve** :

### 5.3 Loi normale ou loi de GAUSS

La loi normale joue un rôle central dans la théorie des probabilités et les statistiques. Une de ses premières applications était due à C.F. GAUSS, qui l'utilisa en 1809 pour modéliser les erreurs d'observation en astronomie.

### 5.3.1 Loi normale

**Définition 5.9** Soit  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit qu'une v.a.r.a.c.  $X$  suit une *loi normale* (ou loi de GAUSS) de paramètres  $(\mu, \sigma^2)$ , et on note

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

si  $X$  admet pour f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

**Remarque :** Il n'existe pas d'expression analytique simple d'une primitive de la fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$ . On admettra que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

**Exercice.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Vérifier que  $f_X$  est une f.d.p.. Représenter graphiquement  $f_X$ .

**Solution :**

**Propriété 5.10** Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors sa f.d.p. vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $f_X$  est symétrique par rapport au point  $\mu$  :  $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $f_X$  est maximale au point  $\mu$  :  $f_X(x) \leq f_X(\mu)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_X(x) = 0$ .

**Proposition 5.11** Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , sa f.r. est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Preuve:** C'est simplement la définition de la f.r..

**Remarque.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Puisque  $f_X$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $F_X$  est aussi de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$F'_X(x) = f_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Proposition 5.12** Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors :

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

**Preuve :** Voir la sous-section sur la loi normale standard.

**Proposition 5.13** (Transformation affine)

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ . Alors

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$$

**Preuve :**

**Corollaire 5.14** Soit  $X$  une v.a.r.a.c.. soit  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

et

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \iff \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

**Preuve :**

**Remarque :** L'intérêt de ce résultat est de ramener tous les calculs sur les lois normales à des calculs sur la loi normale standard (voir ci-après).

### 5.3.2 Loi normale standard

**Définition 5.15** La loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  où  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$  est appelée *loi normale standard*, et est notée  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- La f.d.p. de la loi normale standard est souvent noté par la lettre grecque  $\varphi$ , i.e.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- La f.r. de la loi normale standard est souvent noté par la lettre grecque  $\Phi$ , i.e.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Proposition 5.16** Si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors :

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1$$

**Preuve :**

**Corollaire 5.17** If  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , then:

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

**Preuve :**

**Propriété 5.18** (f.d.p. de  $\mathcal{N}(0, 1)$ )

1)  $\varphi$  est paire :  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

2)  $\varphi$  est maximale en 0.

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

**Preuve :**

**Proposition 5.19** (f.r. de  $\mathcal{N}(0, 1)$ )

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Preuve :**

**Exercice :** Soit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que  $-X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Solution :**

**Propriété 5.20** Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  alors

- $P(\{\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\}) \simeq 0.68$
- $P(\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\}) \simeq 0.95$
- $P(\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\}) \simeq 0.99$

**Preuve :**

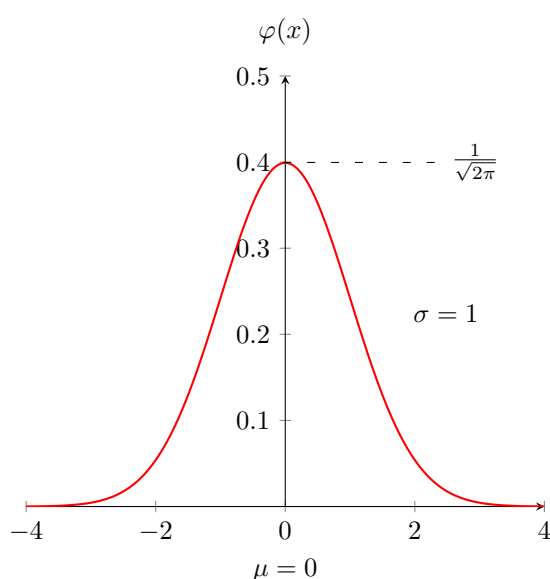


Figure 6: f.d.p. de  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

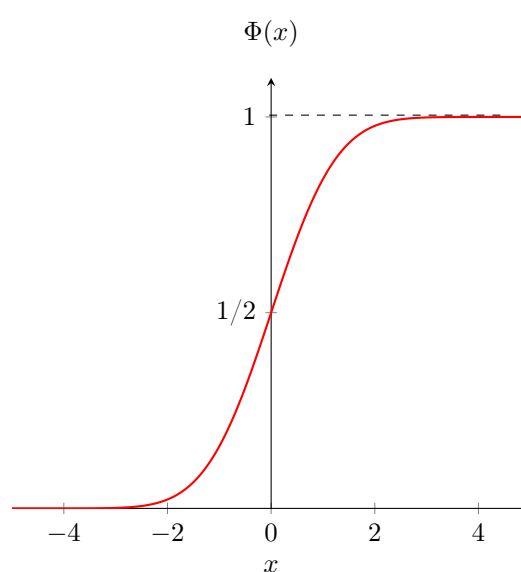


Figure 7: f.r. de  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

### 5.3.3 Table de la loi normale standard

La f.r.  $\Phi$  de la loi normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$  est

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Comme il n'existe pas d'expression analytique simple pour la f.r.  $\Phi$  autre que sa formulation intégrale, les valeurs de la fonction  $\Phi$  pour  $x$  entre 0 et 4, par incréments de 0.01, sont rassemblées dans une table appelée *table de la loi normale standard* (cf fin de ce document).

**Valeurs pour la loi normale standard :**

- **Cas**  $0 \leq x \leq 4$ .

La valeur de  $\Phi(x)$  est lu sur la table à l'intersection de la ligne et de la colonne dont la somme vaut  $x$ . Par exemple,  $\Phi(1.37) = 0.914657$

- **Cas**  $-4 \leq x \leq 0$ .

On utilise la relation  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

Par exemple,  $\Phi(-1.37) = 1 - \Phi(1.37) = 0,085343$

• **Approximation de  $\Phi(x)$ .** Dans certains calculs très précis, on a besoin des valeurs de  $\Phi(x)$  pour  $x > 4$ . La formule suivante donne une très bonne approximation :

$$\Phi(x) \simeq 1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Par exemple,  $\Phi(5) = 1 - 7.45 \times 10^{-7} = 0.999999255$ .

**Valeurs pour une loi normale non-standard :**

Par transformation affine, on peut toujours se ramener à loi normale standard.

**Proposition 5.21** *Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors sa f.r.  $F_X$  satisfait la relation*

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Preuve :** On a vu que  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = P\left(\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

**Remarque :** Cette relation permet de ramener tous les calculs sur les loi normales aux calculs sur la loi normale standard.

**Exemple :** Soit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(6, 2^2)$ . Calculer  $F_X(3)$ .

**Solution :** On a

$$\begin{aligned} F_X(3) &= \Phi\left(\frac{3 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3 - 6}{2}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 1 - 0.933193 \\ &\simeq 0,066807 \end{aligned}$$