



TD N°4 : Tests d'hypothèses sur une caractéristique usuelle

Exercice 1

Une machine produit des billes de roulement de diamètre fixe. Si elle fonctionne normalement, il y a une proportion de 5% de billes défectueuses. Si elle est dérégulée, la proportion de billes défectueuses est de 10%.

Avant d'envoyer une commande à son client, il teste un lot de 500 billes. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de billes défectueuses sur ce lot. On sait que X suit une loi binomiale $b(500, p)$ où $p=0.05$ si la machine fonctionne correctement et $p=0.1$ si la machine est dérégulée.

1. Il décide de ne pas livrer son client si la machine est dérégulée, c'est-à-dire si le nombre de billes défectueuses est supérieur ou égal à 50 ($=500 \times 10\%$).
 - (a) Exprimer les hypothèses H_0 et H_1 ainsi que les risques de 1^{ère} et 2^{ème} espèces.
 - (b) Calculer le risque de 1^{ère} espèce.
 - (c) Calculer la puissance du test et en déduire si un client doit acheter ou non un lot ayant subi un tel test.
2. Le fabricant re-définit son test en imposant un risque de 1^{ère} espèce de 1%.
 - (a) Déterminer la région critique du test.
 - (b) Calculer sa puissance.
 - (c) Énoncer les règles de décision avec les erreurs associées.

Exercice 2

Les habitants d'une région aéroportuaire se plaignent que le bruit des avions dépasse la limite autorisée de 80 décibels en moyenne imposée par la législation. On admet que l'intensité du bruit causé par les avions est une variable aléatoire X de loi gaussienne d'espérance μ et de variance 64.

On mesure un échantillon journalier de $n=16$ variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de l'intensité du bruit, et on effectue le test statistique suivant.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 80 \text{ décibels} \\ H_1 : \mu = \mu_1 = 85 \text{ décibels} \end{cases}$$

- 1) Expliciter les risques de première et deuxième espèces. De quel point de vue est fait ce test ? Celui des habitants ou celui des responsables de l'aéroport ?
- 2) Quelle variable de décision faut-il choisir et quelle est sa loi ?
- 3) Déterminer graphiquement l'allure de la région critique et représenter sur le graphique les erreurs de première et deuxième espèces.
- 4) Calculer le seuil de la région critique pour un risque $\alpha=5\%$.

- 5) Calculer la puissance du test.
- 6) Enoncer les règles de décision avec les probabilités d'erreur.
- 7) La moyenne calculée sur l'échantillon est $\bar{x}=83$ décibels. Les habitants ont-ils raison de se plaindre ? Le test d'hypothèses ainsi établi leur est-il favorable ou défavorable ?
- 8) Combien faudrait-il faire de relevés journaliers, pour que le risque de deuxième espèce soit de 5% ?
- 9) Quelle serait alors le seuil de décision ?

Exercice 3

Un fabricant de conserves de petits pois produit des boîtes où l'étiquette annonce un poids net égoutté de 560gr. Il souhaite construire un test pour s'assurer, d'une part qu'il n'aura pas d'ennui à l'issue d'un contrôle éventuel, et d'autre part, que le poids moyen des boîtes n'est pas excédentaire. Pour ce faire, il compte prélever un lot de 25 boîtes et relever le poids moyen ainsi que l'écart-type.

- 1) Déterminer les hypothèses et expliciter les risques de 1^{ère} et 2^{ème} espèces.
- 2) Quelle est la variable de décision ? Préciser sa loi.
- 3) Déterminer graphiquement l'allure de la région critique.
- 4) Calculer les seuils de la région critique sachant que le risque de 1^{ère} espèce est 10%.
- 5) Peut-on calculer la puissance du test ?
- 6) Il prélève un lot de 25 boîtes et il pèse un poids moyen de $\bar{x}=556$ gr avec un écart-type empirique $s^* = 10$ gr. Quelle décision doit-il prendre ?

Exercice 4

Sur un échantillon de 900 naissances, on constate qu'il y a 470 garçons. Un généticien décide d'utiliser ces données pour savoir si la proportion de garçons est plus importante que la proportion de filles dans cette population.

Exercice 5

Un fabricant produit des piles dont la durée moyenne de vie annoncée est 80h avec un écart-type de 7,44h. Suite à des réclamations, il veut vérifier si la qualité a baissé ou non. Pour l'hypothèse alternative, il choisit de tester si la durée de vie moyenne est 75h. Le cas échéant, il sera obligé de baisser le prix de vente.

- 1) Déterminer les hypothèses et expliciter les risques de 1^{ère} et 2^{ème} espèces.
- 2) Quelle est la statistique du test ? Préciser sa loi.
- 3) Déterminer graphiquement l'allure de la région critique.
- 4) Enoncer la règle de décision sachant que le fabricant souhaite maîtriser les deux erreurs avec $\alpha=0.025$ et $\beta=0.05$.