



TD N°6 : Tests d'hypothèses du chi-deux

Exercice 1

On souhaite valider un programme simulant une variable aléatoire de loi normale $N(109,0.5^2)$. On dispose pour cela d'un échantillon de 500 valeurs qui se répartissent de la façon suivante :

| Classe | Effectif | Classe | Effectif |
|---------------|----------|---------------|----------|
|]107.8,108] | 5 |]109,109.2] | 75 |
|]108,108.2] | 5 |]109.2,109.4] | 85 |
|]108.2,108.4] | 30 |]109.4,109.6] | 55 |
|]108.4,108.6] | 40 |]109.6,109.8] | 30 |
|]108.6,108.8] | 70 |]109.8,110] | 10 |
|]108.8,109] | 85 |]110,110.2] | 10 |

- 1) Peut-on considérer que le programme est correct avec un risque $\alpha=5\%$, $\alpha=1\%$?
- 2) Supposons maintenant que μ et σ^2 soient inconnus mais estimés sur l'échantillon. Peut-on considérer que le programme est correct ?

Exercice 2

Pendant 200 minutes, on note toutes les minutes le nombre de voitures arrivant au poste de péage sur l'autoroute.

| Nombre de voitures par minute | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | Tot |
|--------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|----|-----|
| Effectif des minutes observées | 1 | 15 | 30 | 46 | 38 | 30 | 16 | 13 | 5 | 3 | 2 | 1 | 200 |

N.B. Sur les 200 minutes observées, 15 auront vu passer une voiture et 16 auront vu passer 6 voitures, etc ...

Déterminer la loi de probabilité de cet échantillon.

Soit X le nombre de voitures arrivant au poste de péage par minute. On a observé 200 minutes, donc on a un échantillon de taille $n=200$. ON suppose que X suit une loi de Poisson et on estime son paramètre par la moyenne des observations (cf. 1^{ère} partie), $800/200=4$. La question est de savoir si l'échantillon suit une loi $\mathcal{P}(4)$. Si cela est le cas alors l'effectif théorique de x_i est donné

$$n_i = n \times P(X=x_i) = 200 \times e^{-4} \times 4^{x_i} / (x_i)!$$

| | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|---|---|----|----|
| Nombre de voitures | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Effectif observé | 1 | 15 | 30 | 46 | 38 | 30 | 16 | 13 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| Effectif théorique | 4 | 15 | 29 | 39 | 39 | 31 | 21 | 12 | 6 | 3 | 1 | 0 |

Les effectifs des valeurs extrêmes étant petits (<5), on procède à un regroupement des deux premières et des quatre dernières.

| Nombre de voitures | 0-1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8-11 |
|--------------------|-----|----|----|----|----|----|----|------|
| Effectif observé | 16 | 30 | 46 | 38 | 30 | 16 | 13 | 11 |
| Effectif théorique | 19 | 29 | 39 | 39 | 31 | 21 | 12 | 10 |

La région critique est de la forme, $D_n > C$ et sous l'hypothèse H_0 , D_n suit une loi $\chi^2_{(8-1-1)}$ (car un paramètre λ estimé). Donc si on prend un risque $\alpha=5\%$. On lit dans la table χ^2_6 , $C=12,6$.

La valeur observée de D_n est

$$d_n = \frac{(16-19)^2}{19} + \dots + \frac{(11-10)^2}{10} = 3,196$$

On a $d_n < 12,6$ donc on accepte la loi théorique $\mathcal{P}(4)$ pour l'échantillon sans connaître le risque d'erreur.

Exercice 3

Pour comparer l'efficacité de deux médicaments semblables mais de prix très différents, la sécurité sociale a effectué une enquête sur les guérisons obtenues avec les deux traitements. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

| | Médicament cher | Médicament bon marché |
|--------------|-----------------|-----------------------|
| Guérison | 156 | 44 |
| Non guérison | 44 | 6 |

Peut-on considérer que le taux de guérison est indépendant du coût du médicament ?

Exercice 4

Le tableau ci-dessous donne la répartition par taille (cm) de 2700 salariés masculins par catégories socio-professionnelles (CSP) :

| | Ouvriers | Employés | Cadres | Total |
|--------------------------|-------------|------------|------------|-------------|
| Moins de 165 cm | 325 | 66 | 22 | 413 |
| De 165 à moins de 170 cm | 488 | 110 | 51 | 649 |
| De 170 à moins de 175 cm | 636 | 158 | 123 | 917 |
| 175 cm et plus | 451 | 146 | 124 | 721 |
| Total | 1900 | 480 | 320 | 2700 |

Peut-on considérer que la taille est indépendante de la CSP ?