Les convergences

I Définition - Rappel

On appelle variable aléatoire réelle (et on note) v. a. r. une application X mesurable de
c-a-d :

$$\forall\ B\ \in \beta(\mathbb{R})\ , X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \ X(\omega)\ \in\ B\} \in \mathcal{A}.$$

II Convergences

II.1 Convergence presque sûrement : c.p.s.

Définition. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. et X une v. a. r. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement (ou presque partout) vers X quand $n \to +\infty$ s'il existe un événement A négligeable tq.*

$$\forall\ w \notin\ A, \quad \textit{on ait}: \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

soit encore :

$$\forall\ w \notin\ A, \quad P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

Propriété. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. et X une v. a. r. Si :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\mid X_n - X \mid > \varepsilon)\ < +\infty$$

alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c.p.s. vers X quand $n \to +\infty$.

II.2 Convergence en moyenne, convergence en moyenne quadratique : c.m., c.m.q.

Définition.
1) *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v. a. r. converge vers la v. a. r. X en moyenne (ou dans L^1) quand $n \to +\infty$ ssi :*

$$\lim_{n\to+\infty} E(\mid X_n - X \mid) = 0$$

2) *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v. a. r. converge vers la v. a. r. X en moyenne quadratique(ou dans L^2) quand $n \to +\infty$ ssi :*

$$\lim_{n\to+\infty} E(\mid X_n - X \mid^2) = 0$$

Théorème. *La c.m.q. d'une suite de de v. a. r. entraîne la c.m. de cette suite.*

La preuve de ce théorème utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante :

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient X, Y deux v. a. r. admettant des variances, on a alors :

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = E[(X + tY)^2]$

alors

$$f(t) = E(Y^2)t^2 + 2E(XY)t + E(X^2)$$

$f(t)$ est un polynôme de degré deux en t qui est toujours positif, son discriminant réduit doit être négatif ou nul d'où

$$E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

Preuve du théorème

$$E(| X_n - X |) = E(| X_n - X | \cdot 1) \leq \sqrt{E(| X_n - X |^2)}\sqrt{E(1^2)}$$

or

$$E(1^2) = E(1) = \int_\Omega 1.dP = P(\Omega) = 1$$

donc

$$0 \leq E(| X_n - X |) \leq \left[E(| X_n - X |^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

par conséquent si $E(| X_n - X |^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $E(| X_n - X |) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

II.3 Convergence en probabilité : c.p.

Définition.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v. a. r. converge vers la v. a. r. X en probabilité quand $n \to +\infty$ ssi :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \lim_{n\to+\infty} P(| X_n - X | > \varepsilon) = 0.$$

$$\textit{ou encore} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \lim_{n\to+\infty} P(| X_n - X | < \varepsilon) = 1.$$

Théorème. *La c.m ou la c.p.s. d'une suite de de v. a. r. entraîne la c.p. de cette suite.*

♠ Pour montrer que la c.m. entraîne la c.p. on a besoin de l'inégalité de Markov suivante :

Inégalité Markov

Si X est une v.a.r. positive, on a pour tout réel a strictement positif

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E(X).$$

Preuve de l'inégalité de Markov : voire TD.

Preuve du théorème

D'où $\forall\, \varepsilon > 0,\ \ P(| X_n - X | > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(| X_n - X |)$

donc la c.m. entraîne la c.p.

♠ Pour montrer que la c.p.s. entraîne la c.p. on utilise le théorème de la convergence dominée (voir cours mesure et intégration)

Théorème de la convergence dominée

Etant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une fonction g positive tq. :

♣ $\forall\, n \geq 0 \;\; | f_n | \leq g \quad m.p.p.$

♣ $\displaystyle\int g\, dm < +\infty$

alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n\, dm = \int \lim_{n\to+\infty} f_n\, dm$

D'où si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui c.p.s. vers X alors on considère la suite de fonctions $(1_{|X_n - X|>\varepsilon})_{n\geq 0}$ c.p.s. vers la fonction nulle et est dominée par 1.

Comme $P(| X_n - X | > \varepsilon) = E(1_{|X_n-X|>\varepsilon})$ alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} P(| X_n - X | > \varepsilon) &= \lim_{n\to+\infty} E(1_{|X_n-X|>\varepsilon}) \\ &= E(\lim_{n\to+\infty} 1_{|X_n-X|>\varepsilon}) \\ &= E(0) = 0.\end{aligned}$$

donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c.p. vers X cqfd.

Nous pouvons résumer les implications entre ces différentes notions de convergence dans le schema suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Convergence } \mathrm{L}^2 \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Convergence } \mathrm{L}^1 \\ & & \Downarrow \\ \text{Convergence p.s.} & \Rightarrow & \text{Convergence en probabilité} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Convergence en loi} \end{array}$$

III Loi des grands nombres

III.1 Loi faible des grands nombres

Définition. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v. a. r. indépendantes ayant même espérance, même variance et de carré intégrable. La suite des moyennes arithmétiques $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge dans L^2 vers $E(X_1)$ c-a-d*

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1) |^2 \right) = 0.$$

Preuve

Posons $\displaystyle Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Longrightarrow \; E(Y_n) = E(X_1)$ et $\displaystyle \mathrm{var}(Y_n) = \frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1)$.

comme $E\left((Y_n - E(Y_n))^2\right) = \mathrm{var}(Y_n)$ alors

$$E\left(| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1) |^2 \right) = \mathrm{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \frac{1}{n}\mathrm{var}(X_1)$$

d'où la convergence dans L^2.

Remarque

✠ Comme la convergence dans L^2 entraîne la convergence dans L^1 et la convergence en probabilité ; la suite $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers $E(X_1)$. Ce résultat est très important en statistique, puisqu'il assure que la moyenne empirique $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ des v. a. r. X_i indépendantes, ayant même variance et même espérance est un estimateur convergent de l'espérance.

✠ La loi faible des grands nombres est obtenue sous la condition que les v. a. r. X_i aient même moments d'ordre 1 et 2, mais pas forcément même loi. Il existe une loi forte des grands nombres relative à une convergence plus forte qui s'obtient sous la seule condition d'existence du moment d'ordre 1 mais en renforçant par ailleurs les hypothèses en supposant que les v. a. r. X_i ont la même loi de probabilité.

III.2 Loi forte des grands nombres

Définition. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v. a. r. indépendantes, de même loi et intégrables. On a alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement vers $E(X_1)$ c-a-d*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_1).$$

IV Convergence en loi et théorème central limite

IV.1 Convergence en loi

Définition. *Une suite de v. a. r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v. a. r. X si pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(\varphi(X_n)\right) = E\left(\varphi(X)\right).$$

Remarque

Cette définition n'est pas très "utile" dans la pratique c'est pourquoi on a une autre définition équivalente à l'aide des fonctions de répartition.

Définition. *Soit $F_1, \cdots, F_n$ la suite des fonctions de répartition des v. a. r. $X_1, \cdots, X_n$ et F celle de X. La suite de v. a. r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la v. a. r. X si :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x) \quad \textit{pour tout réel } x \textit{ où } F \textit{ est définie.}$$

Remarque

✠ La convergence en loi est la forme la plus faible ; au sens où, en général, elle n'implique pas les autres formes de convergence.

✠ Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. et X une autre v. a. r., toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ssi :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

✠ Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. et X une autre v. a. r. admettant une densité de probabité f_X. Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ssi :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \text{ avec } a < b,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(a \leq X_n \leq b\right) = P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

Théorème. *Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v. a. r. converge en probabilité vers la v. a. r. X, alors elle converge en loi vers X.*

Preuve

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. qui converge en probabilité vers la v. a. r. X. Si φ est une fonction continue bornée sur un segment alors elle y est uniformément continue d'où :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \quad \text{tq.} \ \mid x - y \mid \leq \eta \Longrightarrow \mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \leq \varepsilon$$

d'où $\mid E\left(\varphi(X_n)\right) - E\left(\varphi(X)\right) \mid = \mid \displaystyle\int_\Omega [\varphi(X_n) - \varphi(X)]\, dp \mid$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_\Omega \mid [\varphi(X_n) - \varphi(X)] \mid \, dp \\
&\qquad \shortparallel \\
\int_{\{|X_n - X| \leq \eta\}} &\mid [\varphi(X_n) - \varphi(X)] \mid \, dp + \int_{\{|X_n - X| > \eta\}} \mid [\varphi(X_n) - \varphi(X)] \mid \, dp \\
&\leq \int_\Omega \varepsilon \, dp + \int_{\{|X_n - X| > \eta\}} 2 \sup_{y \in \mathbb{R}} \mid \varphi(y) \mid \, dp \\
&\leq \varepsilon + 2 \parallel \varphi \parallel_\infty P\left(\mid X_n - X \mid > \eta\right)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \ \lim\limits_{n \to +\infty} \mid E\left(\varphi(X_n)\right) - E\left(\varphi(X)\right) \mid \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} E\left(\varphi(X_n)\right) = E\left(\varphi(X)\right)$

IV.2 Convergence vers la loi de Gauss : théorème central limite

Théorème. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes et de même loi admettant des moments d'ordres 1 et 2 notés μ et $V = \sigma^2 \neq 0$ alors $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} X$ v. a. r. de loi $N(0,1)$.*

Remarque

1) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(a \leq \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \leq b\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

2) L'expression $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$ peut s'écrire d'une autre façon :

souvent on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ de sorte que $\overline{X}_n = \dfrac{S_n}{n}$ et donc

$$
\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}
$$