TD N°1 : Estimation et qualité d'un estimateur

ESTIMATION

Exercice 1 (carte de contrôle)

On a construit une machine produisant des engrenages d'un diamètre de 60 mm avec un écart-type de 1.5 mm. Pour déterminer si la machine est en bon état de marche, on décide de prélever un échantillon de 9 engrenages toutes les 2 heures et, à partir de cet échantillon, de calculer la moyenne des diamètres.

1) Quel type de problème doit-on résoudre ?
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire utilisée.
3) Etablir une règle de décision pour laquelle on puisse être certain avec un niveau de confiance de 95% que la qualité de la production est conforme à la normale.

Exercice 2

Soit X le temps d'attente avant d'être servi au RU. Une série d'observations journalières donne l'échantillon suivant (en min)

10	11	15	8	4	22	13	2	10	10	7	1	19	2	3
16	1	8	15	3	1	19	2	3	19	9	8	15	5	9

On calcule la moyenne $\overline{x}=9$ min et l'écart-type empirique $s^*=6.3$ min.

1) Quelle loi suit X ?
2) Comment déterminer le paramètre de cette loi à partir de l'échantillon ?
3) En déduire la probabilité qu'un étudiant attende plus de 15 min avant d'être servi.

Exercice 3 (loi Gamma)

Une variable aléatoire X de loi Gamma de paramètres $\alpha>0$ et $\beta>0$ est définie par la fonction de densité

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}1_{[0;+\infty[}(x),\text{ où } \Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

1) Montrer que $E(X)=\dfrac{\alpha}{\beta}$ et $V(X)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$.
2) En déduire des estimateurs pour les paramètres α et β.

<u>Exercice 4</u> (loi de Pareto)
Une variable aléatoire X de loi de Pareto de paramètres $\alpha>0$ et $\beta>0$ est définie par la fonction de densité

$$f(x)=\frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}1_{[\alpha;+\infty[}(x).$$

Calculer E(X) et V(X) et en déduire des estimateurs pour les paramètres α et β.

QUALITES D'UN ESTIMATEUR

<u>Exercice 4</u>
Soit X une variable aléatoire deb densité

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}(1-\frac{x}{\theta}) & \text{si } 0\leq x\leq\theta\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1) Calculer E(X) et V(X).

On cherche à estimer θ à partir d'un échantillon $X_1,\ldots,X_n$ de même loi que X. On utilise l'estimateur

$$T_n=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

2) Calculer le biais de cet estimateur. Pouvez-vous lui éliminer son biais ?
3) Etablir la convergence en probabilité de T_n (modifié).
4) Déterminer le risque quadratique puis la convergence en moyenne quadratique.
5) Déterminer la loi asymptotique de T_n.

<u>Exercice 5</u>
Soit $X_1,\ldots,X_n$ un échantillon de loi normale d'espérance θ et de variance $\theta(1-\theta)$ où $\theta\in]0,1[$ est un paramètre inconnu. On considère les estimateurs

$$T_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \text{et} \quad T_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2.$$

1) Montrer que les estimateurs T_1 et T_2 sont sans biais et convergents.
2) Quel estimateur a-t-on intérêt à choisir ?

N.B. On note $V(X_i^2)=2\theta^2(1-\theta^2)$

<u>Exercice 6</u>
On considère deux estimateurs différents d'un même paramètre θ. On suppose que $E(T_1)=\theta+b_1$ et $E(T_2)=\theta+b_2$, où b_1 et b_2 sont des valeurs connues. On pose $T=\alpha T_1+\beta T_2$.

1) Calculer α et β pour que T soit un estimateur sans biais.
2) Supposons maintenant que $b_1=b_2=0$ et $\text{cov}(T_1,T_2)=0$. Calculer α et β pour que T soit de variance minimale.