EISTI – Département Mathématiques
Examen de rattrapage de Statistique Mathématique: GM
Juin 2016- durée 2h00

La consultation et l'échange de documents et de calclatrices sont interdits.
L'utilisation de 3 feuilles manuscrites recto-verso format A4 est autorisée

---

Exercice 1 (6pt). Pour connaître la proportion p des écoles maternelles possédant un ordinateur, un organisme d'étude de marché effectue un sondage.

L'enquête montre que sur $n = 100$ écoles maternelles choisies au hasard, 25 possèdent un ordinateur au moins.

a) Donner une estimation ponctuelle $\hat{p}$ de p et justifier ce choix.

b) Donner un intervalle de confiance à 95% pour p.

c) Quelle doit être la taille de l'échantillon pour connaître p au risque 5% avec une erreur absolue inférieure à 1% ?

d) Si l'on prend la valeur $\hat{p}$ trouvée en 1) comme la vraie valeur de p, entre quelles limites la fréquence observée f_n sur un échantillon de taille $n = 100$ tombera-t-elle avec une probabilité 0.95 ?

Exercice 2 (6pt). Afin de vérifier si une machine est bien réglée, on contrôle le diamètre des pièces qu'elle produit.

Le diamètre moyen des pièces produites par machine bien réglée est de $5mm$. On supposera que le diamètre d'une pièce a une distribution normale d'écart-type $0,4mm$.

En vue du contrôle de la production, on tire un échantillon de n pièces.

1) Construire un test pour savoir si on doit ou non procéder au réglage de la machine:

- Définir l'hypothèse nulle, la contre hypothèse
- Quelle statistique utilisez - vous ? Quelle est sa loi ?
- Déterminer la région critique et tracer son allure (en fonction du risque de première espèce $\alpha = 5\%$)

2) On prélève effectivement un échantillon de 25 pièces. Le diamètre moyen observé sur l'échantillon est de $5,17mm$.

Doit-on procéder au réglage de la machine ?

3) Définir le risque de deuxième espèce.

- A quoi correspondent dans la pratique le risque de première espèce et le risque de deuxième espèce ?
- Calculer le risque de deuxième espèce en fonction de l'hypothèse alternative H_1.

Exercice 3 (8pt). La hauteur maximale X de la crue annuelle d'une rivière est observée très attentivement par les services techniques de la ville car une crue supérieure à 6 mètres serait catastrophique. On a modélisé X comme une variable aléatoire de loi de Rayleigh, c'est-à-dire avec la fonction de densité suivante,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu (on trouvera les moments de X à la fin de l'énoncé ainsi que sa fonction de répartition). Durant une période de n années, on a observé les hauteurs de crues $X_1, ..., X_n$.

N.B. Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.

1) Montrer que l'estimateur

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

est un estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

2) T_n est-il sans biais ?

3) Pouvez-vous établir la convergence presque sûre de T_n ?

4) Déterminer le risque quadratique de T_n et conclure quant à la convergence en moyenne quadratique.

5) Quelle est la loi asymptotique de T_n ?

6) T_n est-il un estimateur efficace ?

N.B. $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta, \quad var(X) = (2 - \frac{\pi}{2})\theta, \quad var(X^2) = 4\theta^2$ et $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\theta}}$.

Exercice 4 (4pt). On désire tester l'effet d'une antibiothérapie systématique sur l'apparition d'une infection post-opératoire. Une expérience randomisée est conduite. Un premier groupe de patients reçoit une antibiothérapie. Un deuxième groupe reçoit un placebo. Les résultats sont les suivants :

	Sujets ayant reçu une antibiothérapie	Sujets ayant reçu un placebo
Infection post-opératoire	10	29
Pas d'infection post-opératoire	75	27

Les effectifs théoriques sont donnés dans le tableau :

	Sujets ayant reçu une antibiothérapie	Sujets ayant reçu un placebo	Total
Infection post-opératoire	23.51	15.49	39
Pas d'infection post-opératoire	61.49	40.51	102
Total	85	56	141

On veut savoir si l'antibothérapie est efficace dans la prévention des complications infectieuses.

a) Formuler l'hypothèse nulle à tester H_0.

b) Rappeler les conditions d'applications du test utilisé. Quelle est sa loi sous H_0 ?

c) Expliquer comment nous avons obtenu le tableau des effectifs théoriques.

d) La valeur observée de de la statistique du test utilisée est $27,02$. Expliquer comment on a obtenu cette valeur ?

e) Déterminer le seuil de la région critique pour un risque $\alpha = 5\%$.

f) Quelle conclusion peut-on en tirer ?