E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2^{me} Année Ingénieurs
Parcours : MF - MI
Examen du 07 janvier 2014
Ancun document n'est autorisé

I (6Pts.)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose

$$Y_n = X_n + X_{n+1} \quad \text{et} \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

1) Donner la loi de Y_n, $E(Y_n)$ (l'espérance de Y_n) et $V(Y_n)$ (la variance de Y_n).
2) Calculer $E(S_n)$ (l'espérance de S_n) .
3) Calculer $V(S_n)$ (la variance de S_n).

   Indication : on pourra montrer, puis utiliser que $S_n = X_1 + 2\sum_{k=2}^{n} X_k + X_{n+1}$.

4) Montrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à $2p$.
5) La suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en moyenne quadratique ?

II (10Pts.)

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon d'une variable aléatoire X dont la densité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\, x \, \exp(\dfrac{-x}{a}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ avec } a > 0.$$

1) Déterminer la fonction de vraisemblance $L(x_1, \cdots, x_n, a)$.
2) Déterminer l'estimateur $\hat{A}_n$ de a obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance.
3) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2}\, x \, \exp(\frac{-x}{a}) dx = 1.$$

4) Déterminer $E(X)$ (l'espérance de X).
5) Déterminer $V(X)$ (la variance de X).
6) Calculer $E(\hat{A}_n)$ et $V(\hat{A}_n)$.
7) L'estimateur $\hat{A}_n$ est-il sans biais, convergent, efficace ?

III (4Pts.)

On dispose d'un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(2, \sigma^2)$ (l'écart type de X est noté σ). On veut choisir entre les deux hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0.09 \\ H_1 : \sigma^2 = 0.16 \end{cases}$$

1) Déterminer la forme de la région critique du test de Neyman-Pearson.

2) On fixe $\alpha = 0.05$. Exprimer la région critique et la puissance du test en fonction de n.

3) **Application Numérique** :

On a observé $s^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2 = 0.13$; à quelle décisions conduit ce test si n = 30 ?

Données :

★ Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires qui suivent une loi normale $N(m, \sigma^2)$ alors $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}{\sigma^2}$ suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté.

★ le fractile d'ordre 0.95 de la loi du $\chi 2$ à 30 degrés de liberté vaut 43.77.

★ le fractile d'ordre 0.2 de la loi du $\chi 2$ à 30 degrés de liberté vaut 24.56.