

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques

2^{me} Année Ingénieurs

Parcours Maths - Finance

Statistique

TD3

Exercice 1

Le total des ventes hebdomadaires d'un produit dans un magasin i , $1 \leq i \leq n$ est une v.a.r. X_i de loi normale $N(m_i, \sigma^2)$ où m_i et σ sont supposés connues. Une campagne publicitaire de ce produit a pour conséquence d'augmenter les ventes, de telle sorte que chaque moyenne m_i est augmentée d'une même quantité a .

1. Déterminer un estimateur de a à partir d'observations indépendantes (X_1, \dots, X_n) des ventes après cette campagne et étudier ses propriétés, puis construire un intervalle de confiance de niveau 0.95.
2. Déterminer un estimateur du paramètre b dans le cas où chaque moyenne m_i est cette fois multipliée par b et étudier ses propriétés.

Exercice 2

Soit X une v.a. de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta ; \theta > 0. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer un estimateur de θ , par la méthode des moments, construit à partir d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de X , et étudier ces propriétés.
2. Déterminer un estimateur sans biais $\hat{\theta}_n$ de θ , construit à partir de l'estimateur du maximum de vraisemblance, et étudier ses propriétés.
3. Construire un intervalle de confiance de niveau 0,95 pour θ dans le cas où on a observé $\max(x_1, \dots, x_{20}) = 5$.

Exercice 3

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon d'une v.a. X de loi normale d'espérance et de variance égales à un paramètre $\theta > 0$ inconnu.

1. Déterminer 2 estimateurs de θ par la méthode des moments, étudier leurs propriétés et les comparer entre eux.
2. Construire un intervalle de confiance pour θ de niveau 0,95 ayant observé :

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 50,23 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 48,12$$

Exercice 4

Soit X une v.a. de densité :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}} & \text{si } x > 0. \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif que l'on se propose d'estimer à partir d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) .

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ et étudier ses propriétés.
2. Construire un intervalle de confiance de niveau 0,90 pour θ dans le cas où on a observé :

$$\sum_{i=1}^{20} \sqrt{x_i} = 47,4$$