

Chapitre 0

Rappels sur les probabilités et les Convergences de v.a.

0.1 Espaces probabilisés

0.1.1 Cas général

En probabilités, on travaille dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Pour cela, on commence par :

1. définir l'ensemble de tous les évènements élémentaires, appelé *espace fondamental* ou *univers*. Il est généralement noté Ω .
2. définir, parmi les parties de Ω , l'ensemble \mathcal{A} des évènements dont on pourra calculer la probabilité. Il s'agit d'une tribu ou σ -algèbre. Autrement dit elle contient \emptyset, Ω , est stable par complémentaire et par union dénombrable.
3. définir une mesure de probabilités, c'est-à-dire une application

$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ avec $P(\Omega) = 1$ et $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'évènements disjoints 2 à 2.

0.1.2 Cas discret

Lorsque l'espace fondamental Ω est discret, c'est-à-dire fini ou dénombrable, on prend :

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, toutes les parties de Ω sont des évènements.
2. La mesure de probabilité est définie par la donnée des $P(\omega), \omega \in \Omega$ avec $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

0.1.3 Cas continu

Lorsque l'espace fondamental Ω est continu, c'est-à-dire $\Omega = \mathbb{R}$ ou un intervalle de \mathbb{R} , on prend :

1. $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ensemble des boréliens = plus petite tribu engendrée par les intervalles.
2. La probabilité est définie par la donnée d'une fonction de densité $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ positive, continue presque partout et qui vérifie $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$. Ainsi la probabilité d'un évènement $A \in \mathcal{A}$ est obtenue par :

$$P(A) = \int_A f(x) dx.$$

0.2 Variable aléatoire

0.2.1 Définition

Etant donné un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on appelle variable aléatoire, toute application : $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie : $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Une variable aléatoire permet de "transporter" la structure probabiliste définie sur Ω vers \mathbb{R} . On obtient ainsi une mesure de probabilité P_X sur \mathbb{R} définie par : $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X(B) = P(X^{-1}(B))$.
 Une v.a. est discrète ou continue selon que $X(\Omega)$ est discret ou continu.

0.2.2 Loi de probabilités, fonction de répartition

1. Lorsque la v.a. est discrète, sa loi de probabilité est définie à l'aide la fonction masse $p_X(x_k) = P(X = x_k) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_k\})$ pour les valeurs x_k du support de X .
2. Dans le cas continu, cette loi est définie grâce à une densité de probabilité $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fonction à valeurs positives, continue presque partout et vérifiant : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3. La fonction de répartition est par définition : $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = P_X(]-\infty, x]).$$

$$\text{Dans le cas discret : } F_X(x) = \sum_{k, x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{k, x_k \leq x} p_X(x_k).$$

$$\text{Dans le cas continu : } F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt.$$

La fonction de répartition est toujours *croissante*, partout *continue à droite* avec une limite égale à 0 en $-\infty$ et égale à 1 en $+\infty$.

0.2.3 Espérance, variance

1. Pour X v.a. discrète, l'espérance ou moyenne de X est :

$$E(X) = \mu = \sum_k x_k P(X = x_k) = \sum_k x_k p_X(x_k).$$

La variance (carré de l'écart-type) est donnée par :

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_k (x_k - \mu)^2 P(X = x_k) = \left[\sum_k x_k^2 P(X = x_k) \right] - \mu^2.$$

2. Pour X v.a. continue, l'espérance ou moyenne de X est :

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \text{ La variance est :}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

0.3 Les principales lois de probabilité

0.3.1 Lois discrètes usuelles

Nom	Notation	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Uniforme		Valeurs prises $x_k, 1 \leq k \leq n$ $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$	$V(X) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n} - E(X)^2$
Bernouilli	$\mathcal{B}(p)$	$X = 1$ (succès) ou $X = 0$ $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p = q$	$E(X) = p$	$V(X) = p(1 - p) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	pour $0 \leq k \leq n$ $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = np(1 - p) = npq$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	pour tout $k \in \mathbb{N}$ $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

0.3.2 Loi continues usuelles

Nom	Notation	Loi de probabilité (densité)	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}[a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$ $f_X(x) = 0$ ailleurs	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{Exp}(\theta)$	$f_X(x) = \theta e^{-\theta x}$ sur $[0, +\infty[$ $f_X(x) = 0$ ailleurs	$E(X) = \frac{1}{\theta}$	$V(X) = \frac{1}{\theta^2}$
Normale Centrée Réduite	$\mathcal{N}(0, 1)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$E(X) = \mu$	$V(X) = \sigma^2$
Chi deux	$\chi^2(n)$ n degrés de liberté	$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$	$E(X) = n$	$V(X) = 2n$
Student	$T(n)$	$T(n) = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ $V \sim \chi^2(n)$	$E(T_n) = 0$ si $n > 0$	$V(T_n) = \frac{n}{n-2}$ si $n > 2$

0.4 Convergence de suites de v.a.

0.4.1 Inégalités importantes

- Inégalité de Markov** Si X est une v.a. qui vérifie : $E(|X|) < +\infty$.

$$\forall a > 0, \quad P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

- Inégalité de Bienaymé - Tchebychev** Si X est une v.a. qui vérifie : $E(X^2) < +\infty$.

$$\forall a > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

0.4.2 Types de convergence

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. et X une autre v.a. donnée.

- Convergence presque sûre**

On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers X , si et ssi :

$$P(X_n \rightarrow X) = 1 \iff P\left(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X\right\}\right) = 1$$

On note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

- Convergence en moyenne quadratique**

On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en moyenne quadratique vers X , si et ssi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - X)^2) = 0$$

On note $X_n \xrightarrow{m.q.} X$

- Convergence en probabilité**

On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers X , si et ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

On note $X_n \xrightarrow{P} X$

4. Convergence en loi

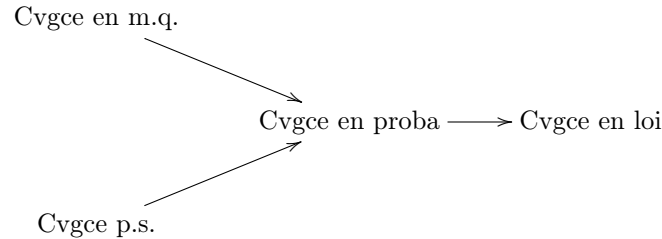
Si on note F_n et F les fonctions de répartition de X_n et de X , on dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X , si et ssi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{partout où } F \text{ est continue}$$

On note $X_n \xrightarrow{L} X$

0.4.3 Relations entre les types de convergence

Entre ces différents types de convergence, on a les relations d'implication suivantes :



0.5 Théorèmes limites

0.5.1 Loi des grands nombres

1. Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.a. non corrélées (qui ne suivent pas forcément la même loi) de même variance finie σ^2 , et de moyenne commune μ , alors

la moyenne empirique : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers μ . Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

2. Loi forte des grands nombres

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de v.a.i.i.d (indépendantes et qui suivent la même loi), intégrables ($E(|X_i|) < \infty$), de moyenne commune μ , alors

la moyenne empirique : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement vers μ . Autrement dit :

$$P(X_n \rightarrow \mu) = 1 \iff P\left(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \mu\right\}\right) = 1$$

0.5.2 Théorème de la limite centrale T.C.L.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d de variance commune finie σ^2 et de moyenne commune μ , alors

la suite de v.a. $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.