



| | | |
|---------------|------------------------|----------------|
| Mathématiques | Examen de statistiques | ING 2 -GI |
| 2016 - 2017 | | 13/12/16 (2 h) |

Exercice 1. -

Si la p-valeur d'un test d'hypothèse sur la moyenne vaut 0.018, quelle décision prenez-vous ?

Reporter la(les) bonne(s) réponse(s) sur votre copie.

- A Rejeter l'hypothèse nulle avec $\alpha = 5\%$
- B Accepter l'hypothèse nulle avec $\alpha = 5\%$
- C Ne pas rejeter l'hypothèse nulle quelle que soit la valeur de α
- D Rejeter l'hypothèse nulle avec $\alpha = 1\%$
- E Accepter l'hypothèse nulle avec $\alpha = 1\%$

Exercice 2. -

Dans un test d'hypothèse sur la moyenne, si on déplace le seuil de décision vers la valeur de la moyenne sous l'hypothèse nulle, alors :

Reporter la(les) bonne(s) réponse(s) sur votre copie.

- A α augmente.
- B α diminue.
- C β augmente.
- D β diminue.

Exercice 3. -

On dispose d'un échantillon de taille $n = 36$ issu d'une population de notes à un examen, la moyenne de l'échantillon est $\bar{x} = 60$.

1. On sait que l'écart-type de la population est $\sigma = 12$. quel est l'I.D.C. à 99 % pour la moyenne de la population ?
2. Supposons que l'on ne connaît pas l'écart-type de la population, mais que celui de l'échantillon soit $s^* = 12$. Quel est l'I.D.C. à 99 % pour la moyenne de la population ?

Exercice 4. -

On sait, grâce aux statistiques que la durée de traitement d'une certaine maladie par une thérapie standard a une moyenne de $\mu = 15$ jours avec un écart-type de $\sigma = 3$ jours.

On proclame que cette durée peut être réduite grâce à une nouvelle thérapie. On teste cette thérapie sur 36 patients, et on obtient une durée moyenne de 14.6 jours.

Pour vérifier cette proclamation, on effectue un test avec un niveau de risque de 5 %.

1. Énoncer l'hypothèse nulle (H_0) et l'alternative (H_1).
2. Quelle est la statistique (variable de décision) du test ? Quelle est sa loi ? Attention à bien définir toutes les constantes et variables aléatoires que vous utilisez dans votre formulation.
3. Représenter graphiquement la région critique, le seuil et le risque de première espèce.
4. Donner la formule permettant de déterminer ce seuil.
5. Si on note C ce seuil, énoncer les règles de décision sans faire de calcul effectif.

Exercice 5. -

Considérons une population de variance σ^2 .

Pour estimer la moyenne, μ , de cette population, on utilise la moyenne empirique \overline{X}_n d'un échantillon de taille n issu de cette population par tirage aléatoire.

Afin de réduire la variance de \overline{X}_n , on envisage d'utiliser un estimateur du type $T = a\overline{X}_n$ avec $0 < a < 1$.

1. Calculer le biais et la variance de l'estimateur T .
2. En déduire l'erreur quadratique moyenne (ou risque quadratique) de cet estimateur.
3. Est-il possible de diminuer en même temps la valeur de la variance et celle du biais? Justifier votre réponse.

Exercice 6. -

Une enseigne de vente de CD souhaite tester s'il existe un lien entre le type de musique acheté et la localisation de la boutique.

Elle dispose de l'échantillon suivant :

| Lieu | Classique | Variété | Rock | Electro | Jazz | Total |
|-----------|-----------|---------|------|---------|------|-------|
| Paris | 21 | 340 | 46 | 210 | 9 | 626 |
| Lyon | 15 | 150 | 20 | 110 | 5 | 300 |
| Marseille | 17 | 180 | 19 | 99 | 6 | 321 |
| Bruxelles | 22 | 175 | 22 | 187 | 6 | 412 |
| Total | 75 | 845 | 107 | 606 | 26 | 1659 |

Elle effectue un test d'hypothèse et obtient une p-valeur $p = 0.007135$.

1. Quel est le nom du test effectué?
Quelles sont les hypothèses nulle et alternative?
2. Afin d'effectuer le test on construit un tableau donnant la distribution théorique, on obtient alors :

| Lieu | Classique | Variété | Rock | Electro | Jazz | Total |
|-----------|-------------|---------|------|---------|------|-------|
| Paris | 28,3 | 318,8 | 40,4 | 228,7 | 9,8 | 626 |
| Lyon | 13,6 | 152,8 | ??? | 109,6 | 4,7 | 300 |
| Marseille | 14,5 | 163,5 | 20,7 | 117,3 | 5,0 | 321 |
| Bruxelles | 22 | 175 | 22 | 187 | 6 | 412 |
| Total | 18,6 | 209,8 | 26,6 | 150,5 | 6,5 | 1659 |

Expliquer comment on obtient la valeur 28,3 pour les ventes de classique à Paris, et poser le calcul permettant de compléter la case vide "ventes de rock à Lyon".

3. Quelle est la statistique du test? Comment l'estime-t-on sur l'échantillon (expliquer les calculs sans les faire).
4. Quelle est la conclusion du test?

Exercice 7. -

La base de données fournie par l'institut national des études démographiques (INED) concerne différents indicateurs démographiques de 196 pays.

Ces indicateurs sont des estimations pour l'année 2011 obtenues à partir d'une étude « World Population Prospects. Nations Unies » datant de 2009.

Les indicateurs sont cinq variables quantitatives :

- Le taux de natalité (TNAT)
- Le taux de mortalité (TMORT)
- L'espérance de vie (EV)
- Le taux de croissance (TCR)

— Le taux de population ayant plus de 65 ans (T65)

On effectue une régression linéaire multiple afin de prédire l'espérance de vie en fonction des autres variables.

Voici les résultats :

```
Call:
lm(formula = EV ~ TCR + TMORT + TNAT, data = Dataset)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-9.9702 -2.0722  0.1488  2.5660 10.5806

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  94.28026    0.74900 125.874  <2e-16 ***
TCR           0.27824    0.60884   0.457   0.648
TMORT        -1.09777    0.09691 -11.328  <2e-16 ***
TNAT         -0.72849    0.06250 -11.656  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.5 on 192 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8763,    Adjusted R-squared:  0.8743
F-statistic: 453.2 on 3 and 192 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

1. Donner la formule du modèle linéaire ainsi estimé.
2. Quel pourcentage de la variabilité de l'espérance de vie est expliqué par ce modèle ?
3. A quel test correspond la dernière ligne des résultats ? Préciser le nom du test et les hypothèses. Quelles est la conclusion de ce test ?
4. Peut-on valider ce modèle d'après ces résultats ?
5. Y a-t-il une variable parmi TCR, TMORT ou TNAT que l'on pourrait enlever du modèle pour l'améliorer ? Justifier votre réponse.
6. Quelles sont les hypothèses que l'on doit vérifier en général pour valider le résultat d'une régression ?

Table de la loi Normale

Table donnant $P(Z < t)$ pour une variable aléatoire suivant $N(0,1)$

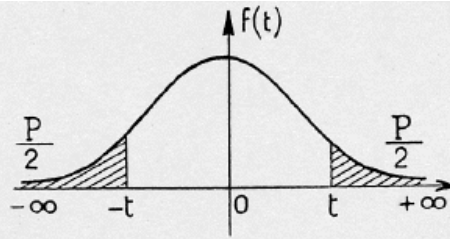


| | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

Table pour les grandes valeurs

| t | 3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,8 | 4 | 4,5 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|
| $\phi(t)$ | 0,9987 | 0,9990 | 0,9993 | 0,9995 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9998 | 0,999928 | 0,999968 | 0,999997 |

Table de la loi de Student



| $\frac{P}{v}$ | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,40 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 636,619 |
| 2 | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 31,598 |
| 3 | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 12,929 |
| 4 | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 8,610 |
| 5 | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,385 | 4,032 | 6,869 |
| 6 | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,959 |
| 7 | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 5,408 |
| 8 | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,886 | 3,355 | 5,041 |
| 9 | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,781 |
| 10 | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,587 |
| 11 | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,437 |
| 12 | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 4,318 |
| 13 | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 4,221 |
| 14 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 4,140 |
| 15 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 4,073 |
| 16 | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 4,015 |
| 17 | 0,128 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,965 |
| 18 | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,922 |
| 19 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,883 |
| 20 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,850 |
| 21 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,819 |
| 22 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,792 |
| 23 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,767 |
| 24 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,745 |
| 25 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,725 |
| 26 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,707 |
| 27 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,690 |
| 28 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,674 |
| 29 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,659 |
| 30 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,646 |
| 40 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,551 |
| 80 | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,460 |
| 120 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,373 |
| ∞ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,291 |