

Corrige TD n° 1

(1)

EX1 $(X_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v. a. r de densité $f_{X_m}(u) = m e^{-mu} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$

1.) cherchons la fonction de répartition $F(u)$. on a :

$$F_{X_m}(u) = 0 \text{ si } u \leq 0 \text{ et } F_{X_m}(u) = \int_{-\infty}^u f(t) dt \text{ si } u \geq 0$$

$$\text{donc } F_{X_m}(u) = \int_0^u m e^{-mt} dt = [-e^{-mt}]_0^u = 1 - e^{-mu}$$

$$\text{donc } F_{X_m}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 1 - e^{-mu} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

il est clair que $\forall u \in \mathbb{R}$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} F_{X_m}(u) = \mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}$.
 convergence p.p. vers la fonction $\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}$ la fonction de densité $f(u) = \delta(u)$
 convergence p.p. vers 0 $\Rightarrow X_m \xrightarrow{\text{loi}} 0$
 la fonction de densité $f(u) = \delta(u)$
 $\mathbb{P}(X=0) = 1$

$$\begin{aligned} 2. \text{ soit } \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_m| > \varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(u) du = \int_{\varepsilon}^{+\infty} m e^{-mu} du = [-e^{-mu}]_{\varepsilon}^{+\infty} \\ &= e^{-m\varepsilon} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_m| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow X_m \xrightarrow{\text{P}} 0$$

la convergence en proba. entraîne celle en loi, on retrouve bien le résultat de 1-1

EX2) Inégalité de Markov: soit X une v. a. r positive, on a pour tout nombre réel a strictement positif :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X).$$

Preuve: $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP = \int_{\{x \geq a\}} x dP + \int_{\{x < a\}} x dP$

$$\begin{aligned} \text{d'où } E(X) &= \int_{\Omega} X \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} dP + \int_{\Omega} X \mathbb{1}_{\{X < a\}} dP \stackrel{R_9}{=} \int_A f dP = \int_{\Omega} f \mathbb{1}_A dP \\ &\geq \int_{\Omega} X \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} dP \\ &\geq \int_{\Omega} a \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} dP = a \int_{\Omega} dP = a P(X \geq a). \end{aligned}$$

d'où $P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X)$. c.q.f.d.

2.) soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = c$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0$. Pour m.q. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} c$ ou va utiliser un corollaire de l'inégalité de Markov:

[soit ϕ une fonction croissante positive et Y une v.a.r. alors $\forall b \in \mathbb{R}$ t.q. $\phi(b) > 0$ on a $P(Y \geq b) \leq \frac{E(\phi(Y))}{\phi(b)}$

Preuve: on applique l'inégalité de Markov à $Z = \phi(Y)$

$$\text{d'où } P(\phi(Y) \geq \phi(b)) \leq \frac{E(\phi(Y))}{\phi(b)}$$

La croissance de ϕ entraîne que $\{Y \geq b\} \subseteq \{\phi(Y) \geq \phi(b)\}$

$$\text{et donc } P(Y \geq b) \leq P(\phi(Y) \geq \phi(b))$$

$$\text{ainsi } P(Y \geq b) \leq \frac{E(\phi(Y))}{\phi(b)}$$

R9 si on choisit $Y = |X - E(X)|$ et $\phi(n) = n^2$ on obtient

l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{E[(X - E(X))^2]}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}$$

2) soit $\varepsilon > 0$ $P(|X_m - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((X_m - c)^2)}{\varepsilon^2}$ (2)

on applique la PG avec $Y = |X_m - c|$ et $\phi(t) = t^2$

c-a-d $P(|X_m - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X_m - c) + [E(X_m - c)]^2}{\varepsilon^2}$

$\text{Var}(X_m - c) = \text{Var}(X_m)$
 $[E(X_m - c)]^2 = [E(X_m) - c]^2$

$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$\leq \frac{\text{Var}(X_m) + [E(X_m - c)]^2}{\varepsilon^2}$

donc si $\text{Var}(X_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ et $[E(X_m - c)]^2 = [E(X_m) - c]^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

puisque $\lim_{m \rightarrow +\infty} E(X_m) = c$ Hyp.

alors on obtient :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} P(|X_m - c| \geq \varepsilon) = 0$ c-a-d

$X_m \xrightarrow{P} c$

soit $(X_m)_{m \geq 1}$ une suite de v.a.r indep. admettant même espérance et même variance finie : on a en posant

$\bar{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ que $E(\bar{X}_m) = \frac{1}{m} E(\sum_{i=1}^m X_i) = \frac{1}{m} m \cdot E(X_1) = E(X_1)$

$\text{Var}(\bar{X}_m) = \text{Var}(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \text{Var}(X_i) = \frac{1}{m^2} m \cdot \text{Var}(X_1) = \frac{1}{m} \text{Var}(X_1)$

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} E(\bar{X}_m) = E(X_1)$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{Var}(\bar{X}_m) = 0 \Rightarrow$

$\bar{X}_m \xrightarrow{P} E(X_1)$ c-a-d

$\forall \varepsilon > 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

EX 3 1) soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v. air indep. tq

$$P(Z_n = 1) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Etudions la convergence en moyenne quad. de $(Z_n)_{n \geq 1}$.

$$\begin{array}{c|cc} P_{Z_n} & 1 & 0 \\ \hline P(Z_n = k) & \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} P_{Z_n^2} & 1 & 0 \\ \hline P(Z_n^2 = k) & \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{array}$$

- car $Z_n^2 = 1 \Leftrightarrow Z_n = 1$
et $Z_n^2 = 0 \Leftrightarrow Z_n = 0$.

$$\text{d'où} \quad E(Z_n^2) = 1 \cdot P(Z_n^2 = 1) + 0 \cdot P(Z_n^2 = 0) = \frac{1}{n}$$

$$\text{d'où} \quad E Z_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad E(|Z_n - 0|^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow (Z_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers 0,

et donc en moyenne et en probabilité vers 0.

2) soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v. air tq

$$P(X_n = U_n) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

a) $U_n = n^2$, on a $P(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $\varepsilon > 0$

$$\text{et donc} \quad \sum_{n \geq 1} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad (\text{série}$$

de Riemann convergente, d'après le cours $(X_n)_{n \geq 1}$ converge

presque sûrement et donc en probabilité vers 0.

$$\text{En revanche} \quad E(X_n) = 0 \cdot P(X_n = 0) + n^2 P(X_n = n^2) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - 0|) = 1 \Rightarrow (X_n)_{n \geq 1} \text{ ne converge}$$

pas en moyenne vers 0.

b) $U_m = m$; ou a. $E(X_m) = 0 \cdot P(X_m=0) + m \cdot P(X_m=m)$ (3)

$$= m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow E(|X_m - 0|) = \frac{1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow X_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\text{moyenne}} 0$$

$$\bullet E(X_m^2) = 0^2 P(X_m=0) + m^2 P(X_m=m) = m^2 \cdot \frac{1}{m^2} = 1$$

$$\Rightarrow P(|X_m - 0|^2) = 1 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(X_m)_{m \geq 1}$ ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

EX4 on effectue n expériences successives indép.

et on s'intéresse à la réalisation d'un événement A .

à chaque expérience i ; $1 \leq i \leq n$ on associe une variable

X_i de Bernoulli de paramètre p . c-a-d

$$P(X_i=1) = p \text{ et } P(X_i=0) = 1-p = q$$

soit $Z_m = \sum_{i=1}^m X_i$; comme les variables X_i sont indép. alors Z_m suit une loi binomiale $B(m, p)$

on sait que $E(Z_m) = mp$ et $V(Z_m) = mpq$

$$\text{d'où } E(\bar{X}_m) = E\left(\frac{1}{m} Z_m\right) = \frac{1}{m} E(Z_m) = p$$

$$V(\bar{X}_m) = V\left(\frac{1}{m} Z_m\right) = \frac{1}{m^2} V(Z_m) = \frac{pq}{m}$$

en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\text{à } \bar{X}_m \text{ on obtient } \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\bar{X}_m - p| > \varepsilon) \leq \frac{V(\bar{X}_m)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{c-a-d } \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\bar{X}_m - p| > \varepsilon) \leq \frac{pq}{m\varepsilon^2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\bar{X}_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\text{Probab}} p$

la fréquence empirique d'un événement converge en proba. vers la probabilité de réalisation de cet événement ou plus exactement la convergence en proba. a lieu vers l'espérance de la v.a.r qui modélise l'expérience.

EX5 $(X_m)_{m \geq 1}$ une suite de v.a.r indep. de même

loi \mathcal{L}_q $E(X_1) < +\infty$.

on a $\frac{X_m}{m} = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m X_i - \sum_{i=1}^{m-1} X_i \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} X_i$

d'après la loi forte des grands nombres on sait que :

$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{P-S} E(X_1)$ et $\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} X_i \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{P-S} E(X_1)$

de plus $\frac{m-1}{m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 1$

$\Rightarrow \frac{X_m}{m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{P-S} 0$

EX6 $E(|X_m + Y_m - (X+Y)|) \leq \int_0^{\infty} |X_m - X| + |Y_m - Y|$

$\Rightarrow E(|X_m + Y_m - (X+Y)|) \leq E(|X_m - X|) + E(|Y_m - Y|)$

$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} E(|X_m + Y_m - (X+Y)|) = 0$

donc $X_m + Y_m \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\text{moyenne}} X + Y$.