Corrigé TD2 - Proba

EX1 Soit A (resp. B, C, D) l'événement : " l'élève choisit l'itinéraire A (resp. B, C, D). " on a $P(A)=\frac{1}{3}$; $P(B)=\frac{1}{4}$; $P(C)=\frac{1}{12}$.
Soit R l'événement : " l'élève arrive en retard ".

1.) on a (A, B, C, D) est un système complet d'événements donc
$P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) \Rightarrow P(D) = \frac{1}{3}$.

2.) l'énoncé donne $P_A(R) = \frac{1}{20}$; $P_B(R) = \frac{1}{10}$; $P_C(R) = \frac{1}{5}$ et $P_D(R) = 0$.

on cherche $P_R(C)$.
on applique la formule de Bayes pour le système complet d'événements de probabilités non nulles (A, B, C, D), on a alors

$$P_R(C) = \frac{P(C)\, P_C(R)}{P(A)\, P_A(R) + P(B)\, P_B(R) + P(C)\, P_C(R) + P(D)\, P_D(R)}$$

$$= \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{2}{7}.$$

EX2 on prend au hasard un dé et on le jette. Soit D l'événement : " le dé est pipé " et S l'événement : " on obtient 6 ".

l'énoncé donne : $P(D) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et $P_D(S) = \frac{1}{2}$.

on cherche $P_S(D)$.
d'après la formule Bayes pour le système complet d'événements $(D, \bar{D})$ on a :

$$P_S(D) = \frac{P(D)\, P_D(S)}{P(D)\, P_D(S) + P(\bar{D})\, P_{\bar{D}}(S)}$$

or $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $P_{\bar{D}}(S) = \frac{1}{6}$ (Proba d'obtenir 6 si le dé est parfait)

d'où $P_S(D) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$

EX3 soient les événements : NN(resp. BB, BN) : " le jeton tiré a 2 faces noires" (resp. deux faces blanches, une face blanche et une noire) et N l'événement : " la face visible est noire".
D'après la formule de Bayes pour le système complet d'événements de probabilités non nulles (NN, BN, BB) on a :

$$P_N(NN) = \frac{P(NN)\,P_{NN}(N)}{P(NN)\,P_{NN}(N) + P(BN)\,P_{BN}(N) + P(BB)\,P_{BB}(N)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times 0} = \frac{2}{3}$$

EX4 1) Loi de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 3,7$; $E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 16,3 \Rightarrow$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 16,3 - (3,7)^2 = 2,61.$

2) loi de Y :

y_i	3	4	5	6
p_i	a	b	c	d

on sait que $\cdot\, P(Y<5) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(Y=3 \text{ ou } Y=4) = P(Y=3)+P(Y=4) = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow a+b = \frac{1}{3}$

$\cdot\, P(Y>5) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(Y=6) = d = \frac{1}{2}$

$\cdot\, P(Y=3) = P(Y=4) \Leftrightarrow a = b$

puis $a+b+c+d = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + c + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}$

de $a+b = \frac{1}{3}$ et $a=b \Rightarrow a = b = \frac{1}{6}$

d'où la loi de Y :

y_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

d'où $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i = 5$; $E(Y^2) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 p_i = \frac{158}{6}$

d'où $V(Y) = \frac{158}{6} - 5^2 = \frac{4}{3}$

EX5 1.) X prend les valeurs $k \in [\![1, 6]\!]$

si $p = P(X=1)$ alors $P(X=k) = kp$ pour $k \in [\![1, 6]\!]$

on doit avoir $\sum_{k=1}^{6} P(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{6} kp = 1 \Rightarrow p\,\frac{6\times 7}{2} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{21}$

d'où la loi de X est :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2.) $E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\,P(X=k) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{k}{21} = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^{6} k^2$ | $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{21}\,\frac{6\times 7\times 13}{6} = \frac{13}{3}$

3°) soit $Y = \frac{1}{X}$; Y prend les valeurs $\frac{1}{k}$ pour $k \in [\![1, 6]\!]$

et $P(Y = \frac{1}{k}) = P(X=k)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$ d'où la loi de Y :

y_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$P(Y=y_k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

d'où $E(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(Y = \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{21} = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^{6} 1 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

EX6 posons $P_k = P(X=k) = \frac{a}{2^k k!}$

1°) $\{(k, P_k) / k \in \mathbb{N}\}$ est la loi d'une V.A.R. X ssi :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} ;\ P_k \geq 0 \\ \sum_{k=0}^{+\infty} P_k = 1 \end{cases}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k = \frac{a}{2^k k!} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

et $\sum_{k=0}^{+\infty} P_k = 1 \Leftrightarrow a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k k!} = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = a\, e^{\frac{1}{2}} = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{e}}}$

2°) X admet une espérance ssi $\sum k P_k$ est absolument convergente

or $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $k P_k = k \frac{1}{\sqrt{e}\, 2^k k!} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \geq 0$ et

$\sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}$ converge $\Rightarrow E(X)$ existe et on a :

$E(X) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \sqrt{e} \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$

3°) X^2 admet une espérance ssi $\sum k^2 P_k$ est absolument convergente

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k^2 P_k \geq 0$ et $k^2 P_k = \frac{1}{2\sqrt{e}} k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}$

on peut écrire $k = k-1+1$ d'où

$k^2 P_k = \frac{1}{2\sqrt{e}} \left[\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$ pour tout $k \geq 2$.

or les séries $\sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}$ et $\sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{(k-2)!}$ convergent donc $E(X^2)$ existe et on a :

$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{e}} (k-1+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{e} + \sqrt{e} \right) = \frac{3}{4}$

X possède une variance et on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{1}{2}}$

EX7 soit B_i (resp. N_i) l'événement : " le $i^{ème}$ tirage donne une boule blanche (resp. noire) ". Pour alléger l'écriture, un événement de la forme $A \cap B$ sera noté AB. X étant le nombre de tirage nécessaire pour qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne, X peut prendre les valeurs 2, 3, 4, 5. On a alors :

- $P(X=2) = P(B_1 B_2) = P(B_1)\, P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

- $P(X=3) = \underbrace{P(B_1 N_2 B_3)}_{P(B_1)\, P_{B_1}(N_2)\, P_{B_1 \cap N_2}(B_3)} + P(N_1 B_2 B_3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{15}$

- $P(X=4) = P(B_1 N_2 N_3 B_4) + P(N_1 B_2 N_3 B_4) + P(N_1 N_2 B_3 B_4) + P(N_1 N_2 N_3 N_4)$

$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{4}{15}$

$P(B_1)\, P_{B_1}(N_2)\, P_{B_1 \cap N_2}(N_3)\, P_{B_1 \cap N_2 \cap N_3}(B_4)$

- $P(X=5) = 1 - \sum_{k=2}^{4} P(X=k) = \frac{8}{15}$

d'où la loi de X :

x_i	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$