**EISTI:**
**ING1-GM : Probabilités 1**

---

## TD 1 : Espace probabilisé

---

**Définitions**. Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire
Si $\Omega$ est un univers associé à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ une tribu sur $\Omega$, alors :
- Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.
- L'ensemble $\mathcal{A}$ est appelé tribu des événements.
- Les éléments de $\mathcal{A}$ s'appellent les événements.
- Les singletons de $\Omega$ (lorsqu'ils sont dans $\mathcal{A}$) s'appellent les événements élémentaires.
• Si $\mathcal{P}$ est une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ , alors :
Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est appelé espace probabilisé.

**Exercice 1** *En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants.*

1. au moins un des événements $A, B$ se réalise.
2. les événements $A, B$ se réalisent.
3. exactement un des événements $A, B$ se réalise.
4. aucun des événements $A, B$ ne se réalise.
5. au moins un des événements $A, B, C$ se réalise.
6. au moins deux des événements $A, B, C$ se réalisent.
7. exactement un des événements $A, B, C$ ne se réalise pas.
8. exactement un des éváments $A, B, C$ se réalise.
9. aucun des événements $A, B, C$ ne se réalise.
10. $A$ ne se réalise pas mais au moins un dés événements $B, C$ se réalise.
11. les événements $A, B, C$ se réalisent.

**Exercice 2** *Opérations infinies dénombrables sur des événements.*

On effectue une suite infinie de tirages du loto. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note l'événement :

$$A_i = \text{ sortie de la boule } n^0 \text{ 13 au i-ième tirage}$$

Un tirage du loto est un tirage successif et sans remise de 6 numéros (un à un) dans

$$U = [|1, 49|]$$

1. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $A_i$ l'évènement :
A = " le $n^o$ 13 sort pour la première fois au cinquième tirage"
2. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i; \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty}\right); \quad E_3 = \bigcup_{i>4} A_i; \quad E_4 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{2i}^c$$

3. On pose $C_n = \bigcap_{i \geq n} A_i$.
a) Vérifier que la suite $(C_n)_{n \geq 0}$ est croissante (i.e. : pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n \subset C_{n+1}$ ).

b) Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement :

$$C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$$

4. Écrire à l'aide des $A_i$ les événements :
$B_n =$ "le $n^o$ 13 sort au moins une fois au delà du $n$-ième tirage "
$B =$ "sur l'ensemble des tirages, le $n^o$ 13 sort une infinité de fois"

**Corrigé exercice 2**.

1)

$$A = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$$

2)

$$E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i = A_5^c \cap A_6^c \cap \ldots$$

" à partir de 5-ième tirage, le $n^o 13$ sort à chaque tirage"

$$E_2 = \left(\cap_{i=1}^{4} A_i^c\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right)$$

" le $n^o 13$ sort pour la première fois au 5-ième titrage et sort à chacun des tirages suivants"

$$E_3 = \bigcup_{i=4}^{+\infty} A_i = A_4 \cup A_5 \cup \ldots$$

" le $n^o 13$ sort au moins une fois à partir du 4-ième tirage"

$$E_4 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{2i}^c = A_2^c \cup A_4^c \cup \ldots$$

" il y'a au moins un tirage de rang pair qui ne fournisse pas la $n^o 13$ "

3)

$$C_n = \bigcap_{i \geq n} A_i = A_n \cap A_{n+1} \cap \ldots$$

a) on a

$$C_n = A_n \cap C_{n+1} \subset C_{n+1}$$

b)

$$C = \bigcup_{n \geq 1} C_n = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$$

" au moins un des $C_n$ se réalise"="réalisation de tous les $A_i$ à partir d'un certain rang" ="la sortie du $n^o 13$ à chacun des tirages à partir d'un certain rang "

$$C = \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcap_{i \geq n} A_i\right)$$

4)

$$B_n = A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots = \bigcup_{i \geq n} A_i$$

" le $n^o 13$ sort une infinité de fois $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists$ (un rang) $i \geq n$ tel que le $i$-ième tirage donne le 13"

- on traduit le quantificateur $\forall$ par $\cap$ et le quantificateur $\exists$ par $\cup$

$$B = \bigcap_{n \geq 1} \left( \bigcup_{i \geq n} A_i \right)$$

**Exercice 3** *Limite des suites d'événements.*

Soit $(A_n)$ une suite d'événements ($A_n \subset \Omega$). Si $(A_n)$ est croissante ($A_n \subset A_{n+1}\ \forall n$), $\cup_n A_n$ est appelée la limite de la suite, et on écrit

$$\cup_n A_n = \lim_n A_n, \quad \text{ou encore } A_n \uparrow \lim_n A_n.$$

Si $(A_n)$ est décroissante ($A_n \supset A_{n+1}\ \forall n$), $\cap_n A_n$ est encore appelée la limite de la suite, et on écrit

$$\cap_n A_n = \lim_n A_n, \quad \text{ou encore } A_n \downarrow \lim_n A_n.$$

On définit:

• $\liminf_n A_n$: comme est l'ensemble de tous les éléments $\omega$ de $\Omega$ qui appartiennent à tous les $A_n$ sauf un nombre fini d'entre eux.

• $\limsup_n A_n$ est l'ensemble de tous les éléments $\omega$ de $\Omega$ qui appartiennent à tous les $A_n$ pour une infinité d'indices $n$.

Monter que

$$\liminf_n A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m; \quad \limsup_n A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m;$$

$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$$

**Corrigé exercice 3**:

1. Dire que $\omega$ appartient à tous les $A_n$ sauf à un nombre fini, c'est dire qu'à partir d'un rang $n$, il appartient à l'intersection $B_n = \cap_{m \geq n} A_m$. Par conséquent, il existe un entier $n$ tel que $\omega \in B_n$, ce qui montre la première identité.

Le fait pour l'élément $\omega$ d'appartenir à une infinité de parties $A_n$ veut dire qu'aussi loin qu'on peut aller dans la suite des entiers, disons à l'indice $n$, cet élément appartient toujours à la réunion $C_n = \cup_{m \geq n} A_m$. Par conséquent, $\omega$ appartient à l'intersection de la suite $(C_n)$, ce qui établit la seconde identité.

L'inclusion est évidente, car si $\omega$ apparient à $\liminf_n A_n$, il appartient à tous les $A_n$ à partir d'un certain rang

**Exercice 4** *Tribu.*

Soit $\Omega$ un ensemble. Pour chaque cas, donner des conditions sur $\Omega$ pour que $\mathcal{A}$ soit une tribu sur $\Omega$.

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

3) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \Omega\}$ où $\omega \in \Omega$

4) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \{\omega\}^c, \Omega\}$ où $\omega \in \Omega$

5) La classe des parties finies de $\Omega$

6) La classe des parties dénombrables (sous-entendu finies ou infinie) de $\Omega$

**Corrigé exercice 4.**

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est toujours une tribu sur $\Omega$, pour tout $\Omega$. C'est la plus petite tribu sur $\Omega$.

2. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est toujours une tribu sur $\Omega$, pour tout $\Omega$. C'est la plus grosse tribu sur $\Omega$.

3. $\mathcal{A} = \{\emptyset,\ \{\omega\}, \Omega\}$.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par passage au complémentaire ce qui implique

$$\{\omega\}^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \quad \{\omega\}^c = \emptyset \ ou \ \Omega$$

Or

$$\omega \in \Omega \ \Rightarrow \ \{\omega\}^c = \emptyset \ \Rightarrow \ \{\omega\} = \Omega$$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{\emptyset;\ \otimes\}$ avec $\Omega$ contient un seul élément.

4.

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \{\omega\}^c, \Omega\} = \sigma(\{\{\omega\}\})$$

la tribu engendrée par $\{\{\omega\}\}$.

5.

$$\mathcal{A} = \{C \subset \Omega : \ card(\Omega) < \infty\}$$

Si $\Omega$ est fini, alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ donc c'est une tribu.

Si $\Omega$ est infini: soit $A \in \mathcal{A}$ on a $A^c$ est infini et donc $\notin \mathcal{A}$ ce qui implique que $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.

6. $\mathcal{A} = \{C \subset \Omega : \ C \text{ dénombrable}\}$.

- Si $\Omega$ est dénombrable alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ donc c'est une tribu

- Soi $\Omega$ est non dénombrable: soit $A \in \mathcal{A}$, $A$ est dénombrable ce qui implique $A^c$ est non dénombrable (sinon $\Omega = A \cup A^c$ serait dénombrable comme union de deux ensembles dénombrables), ce qui implique $A^c \notin \mathcal{A}$, ce qui implique n'est pas une tribu.

**Exercice 5** *Tribu.*

1) Donner la tribu de $\Omega = [0, 2]$ engendrée par $\{[0, 1[, [1, 2]\}$.

2) Donner la tribu de $\Omega = [0, 2]$ engendrée par $\{[0, 1[, 1, ]1, 2]\}$.

3) Soit $\Omega$ un ensemble non vide. Soient $A, B$ deux sous-ensembles (non vides et non identiques) de $\Omega$.

a. Décrire la tribu engendée par $A$.

b. Décrire la tribu engendrée par $A$ et $B$.

**Corrigé exercice 5-**

1) $\Omega = [0, 2]$

$\mathcal{C} = \{[0,1[, [1,2]\}$ est une partition de $\Omega$, on a donc d'après le théorème du cours

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega, [0,1[, [1,2]\}, \quad |\sigma(\mathcal{C})| = 2^2 = 4.$$

2) $\Omega = [0,2]$
$\mathcal{C} = \{[0,1[, \{1\}, ]1,2]\} = \{E_i\}_{1\leq i\leq 3}$
idem

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, [0,1[, \{1\}, ]1,2], [0,1], [0,2]\ \{1\}, [1,2], [0,2]\}$$

3.a)
$\mathcal{B}(A) = \{\emptyset; \Omega; A; A^c\}$ la plus petite tribu contenant $A$.
3.b) $\mathcal{B}(A,B) = \{\emptyset; \Omega; A; B; A^c; B^c; A\cap B; A\cup B; A^c\cap B^c; A^c\cup B^c; A\cap B^c; A\cup B^c; B\cap A^c; B\cup A^c\}$

**Exercice 6**

Montrer que toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie la propriété suivante :
1. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

**Corrigé exercice** 6 :
1. Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \cap A^c)$ et cette réunion est disjointe.
D'où $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\cap A^c)$ et comme $\mathbb{P}(B\cap A^c) \geq 0$, on en déduit $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.
2. On a les décompositions suivantes en unions disjointes :

$$\begin{aligned} A\cup B &= (A\cap B^c)\cup(A\cap B)\cup(A^c\cap B), \\ A &= (A\cap B^c)\cup(A\cap B), \\ B &= (A\cap B)\cup(A^c\cap B). \end{aligned}$$

En utilisant l'additivité on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A\cup B) &= \mathbb{P}(A\cap B^c) + \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A^c\cap B) \\ &= (\mathbb{P}(A\cap B^c) + \mathbb{P}(A\cap B)) + (\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A^c\cap B)) - \mathbb{P}(A\cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B). \end{aligned}$$

**Exercice 7**

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$$

où $A, B$ et $C$ sont deux à deux incompatibles. Évaluer les probabilités suivantes.

$$1)\ \mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) \quad 2)\ \mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \quad 3)\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C) \quad 4)\ \mathbb{P}(A\setminus B)$$

5) La probabilité qu'exactement un des événements $A, B$ et $C$ se réalise.
**Corrigé exercice** 7.

1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) &= 1-\mathbb{P}(A\cup B) = 1-[\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)]\\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{à cause de l'incompatibilité}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) &= 1-\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = 1-[\mathbb{P}(A\cup B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}\left((A\cup B)\cap C\right)]\\ &= 1-[\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(C)-(\mathbb{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))]\\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C) &= \mathbb{P}(\overline{A\cup B\cup\overline{C}}) = 1-\mathbb{P}(A\cup B\cap\overline{C})\\ &= 1-[\mathbb{P}(A\cup B))+\mathbb{P}(\overline{C})-\big(\mathbb{P}((A\cap B)\cup(B\cap\overline{C})\big)]\\ &= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)-1+\mathbb{P}(C)+[\mathbb{P}((A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})]\\ &\text{or} \quad \mathbb{P}(A\cap\overline{C})=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap C) \quad \text{et } \mathbb{P}(B\cap\overline{C})=\mathbb{P}(B-\mathbb{P}(B\cap C) \quad \text{voir exo 6}\\ &= -\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(B\cap C)\\ &= \mathbb{P}(C)=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4)

$$\mathbb{P}(B\setminus A)=\mathbb{P}(B\cap\overline{A})=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(a)=\frac{1}{2}.$$

5)

$$\mathbb{P}\left[(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\right]=\mathbb{P}(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$$

en utilisant la formule de Point carré applique à trois et l'incompatibilité

$$= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

**Exercice 8**

On s'intéresse au nombre de clients passants à une station service durant une période de temps indéterminée. Connaissant la probabilité d'un événement élémentaire,

$$\forall\omega\in\Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!},$$

vérifier qu'on a bien une mesure de probabilité et calculer la probabilité de l'événement $A$={au plus un client}.

**Corrigé exercice 8**. $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité si $\mathbb{P}(\Omega)=1$. Or ici $\Omega=\mathbb{N}$, d'où

$$\mathbb{P}(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\{\omega\}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

$$\mathbb{P}(\{\text{au plus})=\mathbb{P}(\{0\})+\mathbb{P}(\{1\})=e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

**Exercice 9**

On admet que la probabilité qu'une famille ait $k \geq 1$ enfants est $\alpha p^k$, où $p \in ]0,1[$.

1) Déterminer la constante $\alpha$.

2) Calculer la probabilité d'avoir plus de 3 enfants.

**Corrigé de l'exercice 9** .

1) $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Or ici $\Omega = \mathbb{N}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} p^k = \alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k - 1\right) = \alpha(\frac{1}{1-p} - 1) \\ &\quad \text{car série convergente avec } p \in ]0,1[ \\ &= \alpha \frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \alpha \frac{p}{1-p} = 1$. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = (1-p)p^{k-1}.$$

2)

$$\mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \cdots = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) - \mathbb{P}(\{2\}) - \mathbb{P}(\{3\}) = 1 - (1-p)[1 + p + p^2] = p^3.$$

**Exercice 10**

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire les boules une à une avec remise. Quelle est la probabilité pour que, sur $m$ tirages, le plus grand des numéros tirés soit $k$ ?

**Corrigé Exercice** 10. L'univers est ici, l'ensemble des $m$-listes avec répétition de $[|1,n|]$. On le munit de la probabilité uniforme:

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n^m}.$$

Soit, $A_j$, l'évènement " le plus grand des numéros tirés est inférieur ou égal à $j$" et par $B_k$, l'évènement " le plus grand des numéros tirès est égal à $k$".

En convenant que $A_0 = \emptyset$, il vient : $B_k = A_k - A_{k-1}$. D'où $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})$.

Calculons $\mathbb{P}(A_j)$. Les cas favorables à $A_j$ sont les $m$-listes composées d'entiers compris entre 1 et $j$. Il y a donc $j^m$. D'où

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{j^m}{n^m}.$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(B_j) = \frac{j^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m} = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}.$$

Le système $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements. On trouve bien:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^{n} (k^m - (k-1)^m) = \frac{1}{n^m} n^m = 1.$$