

TD2 : Probabilités Conditionnelles

Exercice 1. Soit l'expérience aléatoire de l'observation du temps de fonctionnement (en jours) d'une machine. On lui associe l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = [0, +\infty[$ et

$$\forall D \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(D) = \frac{1}{5} \int_D e^{-t/5} dt.$$

Soient les événements A, B et C suivants :

- $A =$ "la machine fonctionne plus de 8 jours",
- $B =$ "la machine fonctionne entre 10 et 12 jours sans panne",
- $C =$ "la machine fonctionne moins de 10 jours".

1. Calculer $\mathbb{P}(B|A)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(C|A)$.

Solution :

$$\Omega = [0, +\infty[, \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}_{[0, +\infty[, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \int_A e^{-t/5} dt.$$

a) $A =]8, \infty[$ donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \int_8^{\infty} e^{-t/5} dt = [-e^{-t/5}]_8^{\infty} = e^{-8/5} \simeq 0,2018.$$

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{ \text{la machine fonctionne entre 10 et 12 jours après avoir fonctionnée plus de 8 jours} \} \\ &= B \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\int_{10}^{12} e^{-t/5} dt}{\int_8^{+\infty} e^{-t/5} dt} = \frac{[-e^{-12/5} + e^{-2}]}{e^{-8/5}} = e^{-2/5} - e^{-4/5} = 0,2209911$$

b)

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\int_8^{10} e^{-t/5} dt}{\int_8^{+\infty} e^{-t/5} dt} = \frac{(-e^{-2} + e^{-8/5})}{e^{-8/5}} = 1 - e^{-2/5} = 0,3296\dots$$

Exercice 2. . Considérons un pays où il fait beau en moyenne 7 jours sur 10. Dans ce pays, deux stations de radio diffusent chaque matin un bulletin de prévision météorologique pour la journée. Une longue expérience a montré à M. Lambda que la station R avait raison, en moyenne, 95 sur 100, tandis que la station E n'avait raison, en moyenne, que 90 fois sur 100. Un matin M. Lambda doit sortir, il écoute alors les deux stations: R annonce qu'il pleuvra et E qu'il fera beau. Doit-il prendre son parapluie ?

(On fera des hypothèses d'indépendance qui s'imposent et on admettra que chaque station a la même fiabilité dans ses prévisions optimistes et dans ses prévisions pessimistes).

Solution :

Notons:

- B l'événement "il fera beau"
- M l'événement " il pleuvra"
- E_B l'événement " E annonce qu'il fera beau"
- R_M l'événement " R annonce qu'il pleuvra".

On a:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{7}{10}, \quad \mathbb{P}(M) = \frac{3}{10} \quad (\text{on admet que s'il ne fait pas beau, c'est qu'il pleut})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_M|B) &= \frac{5}{100}, & \mathbb{P}(R_M|M) &= \frac{95}{100} \\ \mathbb{P}(E_B|B) &= \frac{90}{100}, & \mathbb{P}(E_B|M) &= \frac{10}{100} \end{aligned}$$

la fiabilité ne dépend pas du temps qu'il fera effectivement

On cherche: $p = \mathbb{P}(B|E_B \cap R_M)$.

Comme $(B; M)$ est un système complet d'événements, la formule de Bayes permet d'écrire:

$$p = \frac{\mathbb{P}(B \cap E_B \cap R_M)}{\mathbb{P}(E_B \cap R_M)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap E_B \cap R_M)}{\mathbb{P}(E_B \cap R_M \cap B) + \mathbb{P}(E_B \cap R_M \cap M)}.$$

Or

$$\mathbb{P}(E_B \cap R_M \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(E_B|B).\mathbb{P}(R_M|B \cap E_B)$$

et comme une station ne se permettrait pas de s'inspirer de ce qui dit l'autre station, on a $\mathbb{P}(R_M|B \cap E_B) = \mathbb{P}(R_M|B)$. D'où

$$\mathbb{P}(E_B \cap R_M \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(E_B|B).\mathbb{P}(R_M|B)$$

le même raisonnement donne

$$\mathbb{P}(E_B \cap R_M \cap M) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(E_B|M).\mathbb{P}(R_M|M)$$

Ainsi

$$p = \frac{\frac{7}{10} \frac{90}{100} \frac{5}{100}}{\frac{7}{10} \frac{90}{100} \frac{5}{100} + \frac{3}{10} \frac{10}{100} \frac{95}{100}} = \frac{21}{40}.$$

La probabilité qu'il fasse beau, compte tenu des révisions, est donc un petit peu supérieure à 0,5. M Lambda peut laisser son parapluie chez lui.

M Lambda doit donc croire celui qui se trompe le plus souvent! Ce résultat qui peut paraître paradoxal s'explique aisément: le temps est plus souvent beau que mauvais. Il y a donc un "plus" de confiance accordé à celui annonce le beau temps.

Exercice 3. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de clefs comportant n clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clefs au hasard l'une après l'autre. Quelle est la probabilité p_k qu'elle ouvre la porte au $k^{\text{ème}}$ essai ? ($1 \leq k \leq n$)

Solution :

Dire que $k^{\text{ème}}$ est le bon signifie que les $k - 1$ premiers essais ont été des échecs et le $k^{\text{ème}}$ essai est un succès.

Soit $A_i =$ "le $i^{\text{ème}}$ essai est un échec". On a

$$p_k = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \dots A_{k-1} \cap \bar{A}_k).$$

Soit alors:

$$p_k = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_{k-1}|A_1 \dots \cap A_{k-2})\mathbb{P}(\bar{A}_k|A_1 \dots \cap A_{k-1})$$

Or

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{C_{n-1}^1}{C_n^1} = \frac{n-1}{n} \quad \text{n cas possibles et n-1 cas favorables à la réalisation de } A_1$$

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{n-2}{n-1} \quad \text{il reste n-1 clefs et parmi ces clefs il reste la bonne,} \\ \text{puisque le premier essai est un échec}$$

$$\mathbb{P}(A_{k-1}|A_1 \cap \dots \cap A_{k-2}) = \frac{n-k+1}{n-k+2} \quad \text{il reste n-k+2 clefs et parmi ces clefs il reste la bonne}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) = \frac{1}{n-k+1}$$

d'où

$$p_k = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Exercice 4. On lance deux dés parfaits et on appelle A_1 l'événement " le premier dé amène un nombre pair", A_2 l'événement " le deuxième dé amène un nombre pair", A_3 l'événement " la somme des nombres obtenus est paire".

Montrer que les événements A_1, A_2, A_3 sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Solution :

On a:

$$\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\} \quad \text{Card}(\Omega) = 36.$$

$$A_1 = \{2, 4, 6\} \times \{1, \dots, 6\} \quad \text{Card}(A_1) = 18.$$

$$A_2 = \{1, \dots, 6\} \times \{2, 4, 6\} \quad \text{Card}(A_2) = 18.$$

$\text{Card}(A_3) = 18$. Donc

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{card}(A_1 \cap A_3) = 9, \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3.$$

Les événements A_1, A_2, A_3 sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants car

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Exercice 5. Soient A, B, C trois événements.

i) Si A et B sont indépendants, alors A et \overline{B} sont indépendants.

ii) Si A et B sont indépendants, et si A et C sont indépendants et si de plus $B \subset C$, alors A et $C \setminus B$ sont indépendants.

iii) Tout événement est indépendant de tout événement de probabilité nulle ou de probabilité égale à 1

iv) Si $(A_n)_n$ est une suite d'événements deux à deux indépendants et si A est indépendant de A_n pour tout n , alors A est indépendant de l'union disjointe $\cup_n A_n$.

Solution :

Pour i) on a:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}), \text{ d'où}$$

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$$

Pour ii) comme $A \cap B \neq \emptyset$ et que $B \subset C$ alors $A \cap B \subset A \cap C$ et on peut donc écrire (faire un schéma):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap (C \setminus B)) &= \mathbb{P}(A \cap C \setminus A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)] = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C \setminus B) \end{aligned}$$

Pour iii)

Supposons que $\mathbb{P}(B) = 0$ et $\mathbb{P}(C) = 1$. Pour tout événement A , on a

$$A \cap B \subset B \Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow 0 = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Pour vérifier que A est indépendant de C , on remarque d'abord A et \overline{C} sont indépendants car \overline{C} est de probabilité nulle. Il résulte de i) que A et C sont indépendants.

La propriété iv) utilise la σ -additivité des probabilités. En effet,

$$\mathbb{P}(A \cap (\cup_n A_n)) = \mathbb{P}(\cup_n (A \cap A_n)) = \sum_n \mathbb{P}(A \cap A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) \sum_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\cup_n A_n)$$

Exercice 7. Supposons A indépendant de $B \cap C$ et de $B \cup C$, puis B indépendant de $C \cap A$ et enfin C indépendant de $A \cap B$ et enfin C indépendant de $A \cap B$. Supposons, en outre, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$ strictement positifs. Montrer que A, B, C sont mutuellement indépendants.

Corrigé.

Écrivons

- " A indépendant de $B \cap C$ " : $\mathbb{P}(A \cap (B \cap C)) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \cap C)$

- " B indépendant de $C \cap A$ " : $\mathbb{P}(B \cap (C \cap A)) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \cap C)$

- " C indépendant de $A \cap B$ " : $\mathbb{P}(C \cap (A \cap B)) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A \cap B)$

d'où

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} = k \quad (a)$$

Écrivons " A indépendant de $B \cup C$ "

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) \cup (A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

soit

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) \quad (b)$$

en substituant (a) dans (b), on trouve $k = 1$.