

TD3 : Variables aléatoires-Corrigé

Exercice 1. Soit X une v.a. ayant pour fonction de répartition F_X . Montrer que

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. F_X est croissante.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(]a, b]) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Solution :

Rappel Fonction de répartition.

a) **Variables discrètes.**

Fonction de masse $p_k = \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(X = k)$.

$$\forall x \in [k_i, k_{i+1}[, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{1 \leq j \leq i} p_j$$

$$\text{Plus généralement,} \quad F_X(x) = \sum_{i \geq 1} q_i \mathbf{1}_{[k_i, k_{i+1}[}(x), \quad q_i = \sum_{1 \leq j \leq i} p_j.$$

La fonction de répartition est alors une fonction croissante par intervalles et sa représentation graphique est en escalier. Les sauts d'une marche à l'autre de l'escalier se situe aux abscisses k_i , et l'amplitude du saut d'abscisse k est

$$p_k = F_X(k) - F_X(k^-)$$

En particulier la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est discontinue exactement aux points k tels que $\mathbb{P}(X = k) > 0$.

Propriétés.

- Si $(A_n)_n$ est une suite croissante d'événement d'élément de \mathcal{A} , alors

$$\lim \uparrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right)$$

- Si $(A_n)_n$ est une suite d'événement décroissante d'élément de \mathcal{A} , alors

$$\lim \downarrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n\right)$$

- Toute fonction monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} admet en tout point intérieur de I une limite à droite et une limite à gauche.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$, c'est une probabilité donc appartient à $[0, 1]$.

2) Découle de la propriété de croissance des mesures de probabilité.

$$\begin{aligned}
x \leq y &\Rightarrow]-\infty, x] \subset]-\infty, y] \\
&\Rightarrow \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) \leq \mathbb{P}_X(]-\infty, y]) \\
&\Rightarrow F(x) \leq F(y)
\end{aligned}$$

3) F_X croissante, donc possède une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_X(]-\infty, n]).$$

Or les boréliens $]-\infty, n]$ forment une suite croissante, donc $\bigcup_n]-\infty, n] = \mathbb{R}$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_X(]-\infty, -n]).$$

Or les boréliens $]-\infty, -n]$ forment une suite décroissante, donc $\bigcap_n]-\infty, -n] = \emptyset$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(-n) = \mathbb{P}_X(\emptyset) = 0.$$

4) $]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$, union de deux intervalles disjoints. Donc

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, b]) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a]) + \mathbb{P}_X(]a, b])$$

\Updownarrow

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(a < X \leq b) \Leftrightarrow F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

Exercice 2. . Montrer que, le saut $p_0 = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$ de la fonction de répartition F_X au point x_0 est égal à $\mathbb{P}(X = x_0)$.

Solution :

Soit (h_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante vers 0. On a, pour tout n ,

$$\mathbb{P}(X \in]x_0 - h_n, x_0]) = F_X(x_0) - F_X(x_0 - h_n).$$

Comme $(]x_0 - h_n, x_0])_n$ est une suite décroissante vers $\{x_0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X(\{x_0\}) &= \mathbb{P}_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]x_0 - h_n, x_0]\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_X(]x_0 - h_n, x_0]) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit p un réel de $]0, 1[$ et X une variable aléatoire discrète telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = kp^n$$

où k est un réel.

Déterminer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de p seulement? Définir la fonction de répartition de X .

Solution :

La loi de probabilité de X doit vérifier $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$,
i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} kp^n = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{1-p} = 1 \Leftrightarrow k = 1-p$$

La v.a. X suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}(1-p)$, d'où son espérance

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{1-p}.$$

La fonction de répartition F de X est $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. On a donc $F(x) = 0$ si $x < 0$

$$F(x) = \sum_{i=0}^n kp^i = 1 - p^{n+1} \quad \text{si } x \in [n, n+1[, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée et définissons la variable aléatoire X comme étant le nombre de piles obtenues.

1. Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X .
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
3. Donner la fonction de répartition F_X et la fonction de masse p_X et tracer leur graphiques.

Solution :

$$\Omega = \{P, F\}^3 \Rightarrow \text{Card}(\Omega) = 2^3 = 8.$$

$$1) \quad X = \text{nombre de piles} \Rightarrow X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

2) Loi de X .

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{1\})) = \mathbb{P}(\{(P, F, F), (F, P, F), (F, F, P)\}) = \frac{3}{8}$$

On peut donc résumer la loi de X dans le tableau suivant :

| | | | | |
|-------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $\mathbb{P}_X(\{x_i\})$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

3) Si $x \in [x_i, x_{i+1}[$ et si l'on note $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ la fonction de masse, alors

$$F_X(x) = \mathbb{P}([-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{1 \leq j \leq i} p_j$$

Plus généralement,

$$F_X(x) = \sum_{i \geq 1} q_i \mathbf{1}_{[x_i, x_{i+1}[}(x), \quad q_i = \sum_{1 \leq j \leq i} p_j.$$

Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité f vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \frac{4}{n} f(n-1).$$

Déterminer cette loi.

Solution :

On montre par récurrence que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) &= \frac{4}{n} f(n-1) = \frac{4^2}{n(n-1)} f(n-2) = \dots \\ &= \frac{4^n}{n(n-1) \dots 2 \cdot 1} f(0) = \frac{4^n}{n!} f(0). \end{aligned}$$

Et puisque f est une loi de probabilité de X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = 1$, et en utilisant $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} = e^4$, on obtient $f(0) = e^{-4}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \frac{4^n}{n!} e^{-4}.$$

X suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Exercice 6. Soit (X_1, \dots, X_n) un système de n variables aléatoires mutuellement indépendantes dont les fonctions de répartition sont respectivement F_{X_1}, \dots, F_{X_n} . Déterminer les fonctions de répartition de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq x\}, \dots, \{X_n \leq x\}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \leq x\}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 > x\}, \dots, \{X_n > x\}) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i > x\}) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \mathbb{P}(\{X_i \leq x\})] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(x)] \end{aligned}$$

Exercice 7.

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{18} + a & \text{si } -1 < x \leq 2 \text{ ou } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer le réel a pour que f puisse être considérée comme la densité de probabilité d'une v.a. X et déterminer la fonction de répartition F associée.

Solution :

f est une densité de probabilité si:

- i) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, donc si $a \geq \frac{1}{9}$.
- ii) Pour $a \geq \frac{1}{9}$, f est continue sauf en -1 et 2 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.
- iii) On doit avoir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Or

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^2 \left(-\frac{x}{18} + a\right)dx = -\frac{3}{36} + 3a$$

cela implique que $a = \frac{13}{36} > \frac{1}{9}$.

La fonction de répartition F est telle que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$:

Pour $x \geq -1$, $f(t) = 0$, donc $F(x) = 0$.

Pour $-1 < x \leq 2$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^x \left(-\frac{t}{18} + \frac{13}{36}\right) dt = -\frac{x^2}{36} + \frac{13x}{36} + \frac{7}{18}.$$

Pour $x > 2$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt = F(2) + 0 = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ -\frac{x^2}{36} + \frac{13x}{36} + \frac{7}{18} & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1) Déterminer la loi de X sachant que:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \exists q \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = q\mathbb{P}(X \geq n).$$

2) Déterminer la loi de X sachant que:

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n - 1).$$

Solution :

Notons $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, pour $n \in X(\Omega)$.

i) On a

$$(X \leq n) = (X = n) \cup (X \leq n + 1) \quad \text{et cette réunion est disjointe}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X \geq n) = p_n + \mathbb{P}(X \geq n + 1) \quad \Rightarrow \quad q\mathbb{P}(X \geq n) = qp_n + q\mathbb{P}(X \geq n + 1)$$

soit avec l'hypothèse faite:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = qp_n + p_{n+1}, \quad \text{i.e. } p_{n+1} = (1 - q)p_n.$$

Ainsi, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $(1 - q)$, ce qui permet d'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = (1 - q)^{n-1} p_1.$$

Mais, comme il s'agit d'une distribution de probabilité, on a:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q)^{n-1} = \frac{p_1}{1 - (1 - q)} \Rightarrow p_1 = q.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = q(1 - q)^{n-1}$$

X suit la loi géométrique de paramètre q .

2) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_n}{p_0} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdots \frac{p_1}{p_0} = \frac{4^n}{n+1}, \quad \text{i.e.} \quad p_n = p_0 \frac{4^n}{n!}$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, il vient

$$p_0 \sum_0^{\infty} \frac{4^n}{n!} = p_0 e^4 = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-4}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = e^{-4} \frac{4^n}{n!}$, X suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Exercice 9. Montrer que, si pour tout i , les fonctions

$$\varphi_i : (E_i, \mathcal{B}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (E'_i, \mathcal{B}'_i) = (\mathbb{R}', \mathcal{B}(\mathbb{R}'))$$

sont des fonctions mesurables, alors l'indépendance des variables aléatoires $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ entraîne celle des $(\varphi_i(X_i))_{i=1, \dots, n}$.

Solution :

Pour toute famille $(B'_i)_{i=1, \dots, n}$ où $B'_i \in \mathcal{B}'_i$, pour tout i , on a

$$\varphi_i^{-1}(B'_i) = B_i \in \mathcal{B}_i$$

par mesurabilité des φ_i . Il vient alors :

$$(\varphi_i(X_i))^{-1}(B'_i) = X_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(B'_i)) = X_i^{-1}(B_i)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{\varphi_i \circ X_i \in B'_i\} \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (\varphi_i(X_i))^{-1} \in B'_i \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i^{-1}(B_i)\} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\varphi_i(X_i) \in B'_i) \end{aligned}$$

et les $(\varphi_i(X_i))_{i=1, \dots, n}$ sont bien des variables aléatoires indépendantes.