E.I.S.T.I. - Département Mathématiques

Tests

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de variable aléatoire réelle de densité :

$$f_{X_n}(x) = ne^{-nx}1_{[0;+\infty[}(x)$$

1. Etudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in N}$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in N}$ converge en probabilité vers 0 et retrouver le résultat du 1.

Exercice 2

1. Rappeler et démontrer l'inégalité de Markov
2. Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a.r. tel que

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = c \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

   Montrer que $(X_n)_{n\in N}$ converge en probabilité vers c. En déduire une preuve directe de la démonstration de la loi faible des grands nombres.

Exercice 3

1. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. tel que Z_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité, en moyenne et en moyenne quadratique.
2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. tel que

$$P(X_n = U_n) = \frac{1}{n^2} \qquad et \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

(a) Lorsque $U_n = n^2$, Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement et en probabilité vers 0, mais ne converge pas en moyenne vers 0.

(b) Lorsque $U_n = n$, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne vers 0, mais ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 4

On effectue n expériences successives indépendantes où on s'intéresse à chaque fois à la réalisation d'un événement A. On associe à chaque expérience i, $1 \leq i \leq n$, une variable de Bernoulli X_i de paramètre p.

Montrer que la fréquence empirique $f_n \equiv \overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers p.

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi tel que $\mathrm{E}(X_1) < +\infty$.

Montrer que $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{c.p.s.} 0$.

Indication : Montrer puis utiliser : $\dfrac{X_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{n-1}{n} \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1}$

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. qui converge en moyenne vers X et $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. qui converge en moyenne vers Y.

Montrer que la suite $(X_n + Y_n)_{n\geq 0}$ converge en moyenne vers $X + Y$.