EISTI
ING1-GM : Probabilités

TD3 : Variables aléatoires

Exercice 1. Soit X une v.a. ayant pour fonction de répartition F_X. Montrer que
1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. F_X est croissante.
3. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(]a,b[) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exercice 2. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée et définissons la variable aléatoire X comme étant le nombre de piles obtenues.
1. Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X .
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
3. Donner la fonction de répartition F_X et la fonction de masse p_X et tracer leur graphiques.

Exercice 3. .
On considère la fonction f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{18} + a & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \text{ ou } a \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer le réel a pour que f puisse être considérée comme la densité de probabilité d'une v.a. X et déterminer la fonction de répartition F associée.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
1) Déterminer la loi de X sachant que:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \exists\, q \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = q\mathbb{P}(X \geq n).$$

2) Déterminer la loi de X sachant que:

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n-1).$$

Exercice 5. 1. Soit X et Y deux variables indépendantes (avec :$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$) et $S = X + Y$. Déterminer la loi de S.

2. On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire donnant le résultat du premier dé et Y celui du second.
a). Quelle est la loi de ces deux variables ?
On appelle S la variable aléatoire somme de X et Y.
b). Déterminer la loi de S et donner sa fonction de répartition F.
3. Notons T la variable aléatoire donnant le plus grand des deux résultats obtenus lors du double lancer et U le plus petit des deux résultats.
a). Déterminer la loi de T
b). Déterminer la loi de U

Exercice 6. Soit X une v.a.r. absolument continue, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, de densité f.
(i) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Montrer que $Y = aX + b$ est une v.a.r. absolument continue dont une densité g est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

(ii) Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Montrer que lorsque r est impair, alors $Z = X^r$ est une v.a. continue dont une densité généralisée est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \neq 0,\ h(x) = \frac{x^{r/2}}{r.x} f\left(x^{r/2}\right) \text{ et } h(0) = 0$$

Exercice - Si, pour tout i, les fonctions φ_i sont des fonctions mesurables de $(E_i, \mathcal{B}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) =$ vers $(E_i', \mathcal{B}_i') = (\mathbb{R}', \mathcal{B}(\mathbb{R}') =$ vers, alors l'indépendance des variables aléatoires $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ entraîne celle des $(\varphi_i(X_i))_{i=1,\ldots,n}$.

Corrigé-. Pour toute famille $(B_i')_{i=1,\ldots,n}$ où $B_i' \in \mathcal{B}_i'$, pour tout i, on a

$$\varphi_i^{-1}(B_i') = B_i \in \mathcal{B}_i$$

par mesurabilité des φ. Il vient alors :

$$(\varphi_i(X_i))^{-1}(B_i') = X_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(B_i')) = X_i^{-1}(B_i)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\varphi \circ X_i \in B_i'\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(\varphi(X_i))^{-1} \in B_i'\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i^{-1}(B_i)\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in B_i\}\right) == \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\varphi(X_i) \in B_i')
\end{aligned}$$

et les $(\varphi_i(X_i))_{i=1,\ldots,n}$ sont bien des variables aléatoires indépendantes.

Exercice. Montrer que la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X satisfait les propriétés suivantes :

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}$;
2. La fonction F_X est croissante (au sens large) ;
3. la fonction F_X est continue à droite ;
4. On a
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \qquad et \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

Corrigé. La propriété 1) est évidente puisque la probabilité de n'importe quel événement est toujours positive et inférieure à 1. Pour établir le 2) considérons x et x' deux réels tels que $x \leq x'$. On a l'inclusion $]-\infty, x] \subset]-\infty, x']$ et donc

$$\mathbb{P}_X\left(]-\infty, x]\right) \leq \mathbb{P}_X\left(]-\infty, x']\right).$$

Pour le 3) considérons une suite (h_n) de réels décroissante vers 0. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a:

$$P_X(]x, x+h_n]) = F_X(x+h_n) - F_X(x).$$

Or la suite d'intervalles $(]x, x+h_n])_n$ est décroissante avec n, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_X]x, x+h_n]) = \mathbb{P}_X\left(\bigcap_n]x, x+h_n]\right) = \mathbb{P}_X(\emptyset) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} F_X(x+h_n) = F_X(x)$ et la fonction F_X est donc bien continue à droite.
Pour établir le 4), considérons la suite d'intervalles $(]-\infty,-n])_n$ décroissante vers $\emptyset$ quand n tend vers $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to-\infty} F_X(x) &= \lim_{n\to+\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_X(]-\infty,-n]) \\ &= \mathbb{P}_X\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\infty,-n]\right) = \mathbb{P}_X(\emptyset) = 0.\end{aligned}$$

L'égalité $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ s'obtient par un raisonnement similaire en considérant la suite d'intervalles $(]-\infty,n])_n$ croissante vers $\mathbb{R}$.

Exercice Le saut $p_0 = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$ de la fonction de répartition F_X au point x_0 est égal à $\mathbb{P}(X = x_0)$.
Corrigé.- Preuve. Soit (h_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante vers 0. On a, pour tout n,

$$\mathbb{P}\left(X \in]x_0 - h_n,\ x_0]\right) = F_X(x_0) - F_X(x_0 - h_n).$$

Comme $(]x_0 - h_n,\ x_0])_n$ est une suite décroissante vers $\{x_0\}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(\{x_0\}) &= \mathbb{P}_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]x_0 - h_n, x_0]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_X\left(]x_0 - h_n, x_0]\right) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)\end{aligned}$$