EISTI:
ING1-GM : Probabilités 1. 17-18

TD 1 : Espace probabilisé

Définitions. Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire
Si Ω est un univers associé à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, alors :
- Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.
- L'ensemble $\mathcal{A}$ est appelé tribu des événements.
- Les éléments de $\mathcal{A}$ s'appellent les événements.
- Les singletons de Ω (lorsqu'ils sont dans $\mathcal{A}$) s'appellent les événements élémentaires.
• Si $\mathcal{P}$ est une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors :
Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est appelé espace probabilisé.

Exercice 1 *En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants.*

1. au moins un des événements A, B se réalise.
2. les événements A, B se réalisent.
3. exactement un des événements A, B se réalise.
4. aucun des événements A, B ne se réalise.
5. au moins un des événements A, B, C se réalise.
6. au moins deux des événements A, B, C se réalisent.
7. exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.
8. exactement un des éviments A, B, C se réalise.
9. aucun des événements A, B, C ne se réalise.
10. A ne se réalise pas mais au moins un dés événements B, C se réalise.
11. les événements A, B, C se réalisent.

Exercice 2 *Opérations infinies dénombrables sur des événements.*

On effectue une suite infinie de tirages du loto. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note l'événement :

$$A_i = \text{ sortie de la boule } n^0 \text{ 13 au i-ième tirage}$$

Un tirage du loto est un tirage successif et sans remise de 6 numéros (un à un) dans

$$U = [|1, 49|]$$

1. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes sur les A_i l'évènement :
A = " le n^o 13 sort pour la première fois au cinquième tirage"
2. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$E_1 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i; \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right); \quad E_3 = \bigcup_{i>4} A_i; \quad E_4 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{2i}^c$$

3. On pose $C_n = \bigcap_{i \geq n} A_i$.
a) Vérifier que la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ est croissante (i.e. : pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n \subset C_{n+1}$).

b) Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement :

$$C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$$

4. Écrire à l'aide des A_i les événements :
$B_n =$ "le n^o 13 sort au moins une fois au delà du n-ième tirage "
$B_n =$ "sur l'ensemble des tirages, le n^o 13 sort une infinité de fois"

Exercice 3 *Limite des suites d'événements.*

Soit (A_n) une suite d'événements ($A_n \subset \Omega$). Si (A_n) est croissante ($A_n \subset A_{n+1}\ \forall n$), $\cup_n A_n$ est appelée la limite de la suite, et on écrit

$$\cup_n A_n = \lim_n A_n, \quad \text{ou encore } A_n \uparrow \lim_n A_n.$$

Si (A_n) est décroissante ($A_n \supset A_{n+1}\ \forall n$), $\cap_n A_n$ est encore appelée la limite de la suite, et on écrit

$$\cap_n A_n = \lim_n A_n, \quad \text{ou encore } A_n \downarrow \lim_n A_n.$$

On définit:

• $\liminf_n A_n$: comme est l'ensemble de tous les éléments ω de Ω qui appartiennent à tous les A_n sauf un nombre fini d'entre eux.

• $\limsup_n A_n$ est l'ensemble de tous les éléments ω de Ω qui appartiennent à tous les A_n pour une infinité d'indices n.

Monter que

$$\liminf_n A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} A_m; \quad \limsup_n A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m;$$
$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$$

Exercice 4 *Tribu.*

Soit Ω un ensemble. Pour chaque cas, donner des conditions sur Ω pour que $\mathcal{A}$ soit une tribu sur Ω.

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
3) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \Omega\}$ où $\omega \in \Omega$
4) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \{\omega\}^c, \Omega\}$ où $\omega \in \Omega$
5) La classe des parties finies de Ω
6) La classe des parties dénombrables (sous-entendu finies ou infinie) de Ω

Exercice 5 *Tribu.*

1) Donner la tribu de $\Omega = [0, 2]$ engendrée par $\{[0, 1[, [1, 2]\}$.
2) Donner la tribu de $\Omega = [0, 2]$ engendrée par $\{[0, 1[, 1,]1, 2]\}$.
3) Soit Ω un ensemble non vide. Soient A, B deux sous-ensembles (non vides et non identiques) de Ω.
a. Décrire la tribu engendée par A.
b. Décrire la tribu engendrée par A et B.

Exercice 6

Montrer que toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie la propriété suivante :

1. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 7

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$$

où A, B et C sont deux à deux incompatibles. Évaluer les probabilités suivantes.

$$1)\ \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \quad 2)\ \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \quad 3)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \quad 4)\ \mathbb{P}(A \setminus B)$$

5) La probabilité qu'exactement un des événements A, B et C se réalise.

Exercice 8

On s'intéresse au nombre de clients passants à une station service durant une période de temps indéterminée. Connaissant la probabilité d'un événement élémentaire,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!},$$

vérifier qu'on a bien une mesure de probabilité et calculer la probabilité de l'événement A=\{au plus un client\}.

Exercice 9

On admet que la probabilité qu'une famille ait $k \geq 1$ enfants est αp^k, où $p \in]0, 1[$.

1) Déterminer la constante α.
2) Calculer la probabilité d'avoir plus de 3 enfants.

Exercice 10

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une avec remise. Quelle est la probabilité pour que, sur m tirages, le plus grand des numéros tirés soit k ?